

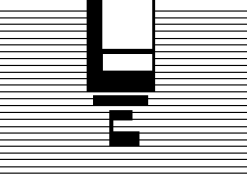
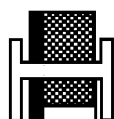
PÅLKOMMISSIONEN

Teknisk PM 1:2015

Dimensionering av pålar med hänsyn till knäckning och stukning

Utförd av

Håkan Bredenberg



Pålkommisionen

Dimensionering av pålar med hänsyn till knäckning och stukning

Förord

Varje år installeras ca 2 miljoner meter pålar i Sverige. Om man antar att priset i medeltal är ca 1000 kr/m (vilket kan vara i underkant) så motsvarar den installerade mängden alltså ca 2 miljarder kr/år. Detta är en betydande del av våra kostnader för grundläggning. Man kan därför förvänta sig att även relativt marginella insatser för effektivisering här kan ge stora besparingar.

En faktor som i hög grad påverkar den sammanlagda kostnaden för pålning är tillämpad praxis för dimensionering av pålar eftersom utnyttjandegraden och därmed antalet pålar för varje pålningsprojekt beror av resultatet av dimensioneringen.

Pålkommisionen beslutade därför 2013 att granska gällande praxis för dimensionering och föreslå riktlinjer för att modifiera denna så att ökad utnyttjandegrad av pålar kan uppnås, i de fall detta är möjligt och lämpligt. En viktig del i detta arbete är att ange en ingenjörsmässigt användbar beräkningsmetod för dimensionering av pålar.

Föreliggande rapport vänder sig i första hand till konstruktörer och projektörer. Beställare och entreprenörer samt påltillverkare kan sedan tillgodogöra sig de förbättringar och besparingar som uppnås.

Sammanfattning

De resultat som kan uppnås med föreslagen modifierad beräkningsmodell vid rutinmässig dimensionering av pålar är i första hand att kunna beakta följande:

- olika geotekniska parametrar utefter pålen
- olika tvärsnitt på olika påldelar.
- ändlig längd hos pålar
- olika inspänningsförhållanden vid påltoppen
- olika initiell utböjning (även skarvvinkeländring)

Bland fördelarna med hänsynstagande till nämnda faktorer, vilket inte sker med tillämpning av gällande praxis, är i första hand följande:

- överdimensionering orsakad av nödvändig förenkling av om jordprofil undviks
- teknikutveckling avseende ökning av pålars kapacitet underlättas, t ex pålar variabel styvhet (utformad med avseende på jordprofilen)

För tillämpning i dimensioneringsarbete behövs utveckling av beräkningsverktyg, alltså programmering. Några sådana insatser ingår dock inte i rapporten.

Knäckning – en historisk tillbakablick

Fenomenet knäckning innebär att tryckkraftskapaciteten för ett konstruktionselement är lägre, ofta mycket lägre, än det värde som ges av värdet tryckhållfastheten gånger tvärsnittsarean. Fastän detta idag är elementär kunskap för de flesta byggare så har så inte alltid varit fallet.

De första kända provbelastningarna av strävors knäcklast utfördes 1729 av holländaren van Musschenbroek. Han kom till resultatet att knäcklasten var omvänt proportionell mot en strävas längd i kvadrat. Detta hade härletts teoretiskt av Euler ca 30 år tidigare. Till en början accepterades bland ingenjörer vare sig nämnda försöksresultat eller Eulers analys.

Till och med så framstående personer som Coulomb menade att tryckkapaciteten för strävor var oberoende av längden och istället alltid en produkt av tvärsnittsarean och tryckhållfastheten. Dåtida försöksresultat understödde detta synsätt. En förklaring torde vara att de provningar som utfördes i allmänhet omfattade relativt korta pelare av trä eller gjutjärn.

Inte förrän 1845 påvisade Lamarle att Eulers teori gav god överensstämmelse med försöksresultat, förutsatt att försöken ordnades så att randvillkoren, alltså ledat/styrda ändinfästningar och försumbart liten excentricitet för lastangrepp, motsvarade Eulers förutsättningar.

Senare undersökningar påvisade vikten av att beakta avvikelser från Eulers renodlade förutsättningar. Som exempel kan nämnas inverkan av initiell krokighet och från tillverkning kvarstående egenspanningar i material. Sådant utvecklingsarbete under mer än 100 år återges i standardverket "Theory of Elastic Stability", av Timoshenko och Gere, 1961.

Ett specialfall av knäckning utgörs av strävor omgivna av ett stödjande medium, exempelvis jord. Knäcklasten för en rak, lång sträva omgiven av sådant stöd i form av tätt placerade linjärelastiska fjädrar, s k Winkler-bädd ("spiralmadrass"), beräknades 1918 av Carl Forssell vid KTH. Resultaten tillämpas för pålberäkningar av Granholm 1929. Fastän denna modell för omgivningen har uppenbara tillkortakommanden (t ex slutar den vid strävans ändar) så kan den sägas utgöra standardmodellen för många ingenjörstekniska tillämpningar.

En sammanställning och utvidgad analys av denna typ av strävor redovisas i referensverket "Beams on Elastic Foundation", Hetényi, 1946. Där härleds och visas bl a uttryck för beräkning av knäcklast för raka strävor av olika längd och med olika randvillkor, givet att strävan och omgivningen har konstanta egenskaper.

Senare undersökningar har beaktat inverkan av kontinuerlig elastisk omgivning, i tiden varierande belastning, olika jordmodeller, mm. Till skillnad från de relativt enkla uttryck som redovisas av nämnda författare, och som lämpar sig för handberäkning, så krävs i allmänhet datoranvändning för beräkningarna när mer avancerad modellering av strävomgivningar än Winklermodellens tillämpas.

För tvärsnittsanalys av samband mellan krafter och rörelser (samt spänningar och töjningar) finns idag ett flertal datorbaserade numeriska industristandardmetoder, exempelvis ASTRAN, ABAQUS och DIANA. Inom geotekniken finns PLAXIS och ZSOIL. Gemensamt för sådana metoder är att de kräver betydande utbildningsinsats för korrekt tillämpning och ganska omfattande arbete med inmatning och presentation av data. Som standardmetod för beräkning av knäcklast bedöms de i dagsläget i allmänhet som inte tillämpbara.

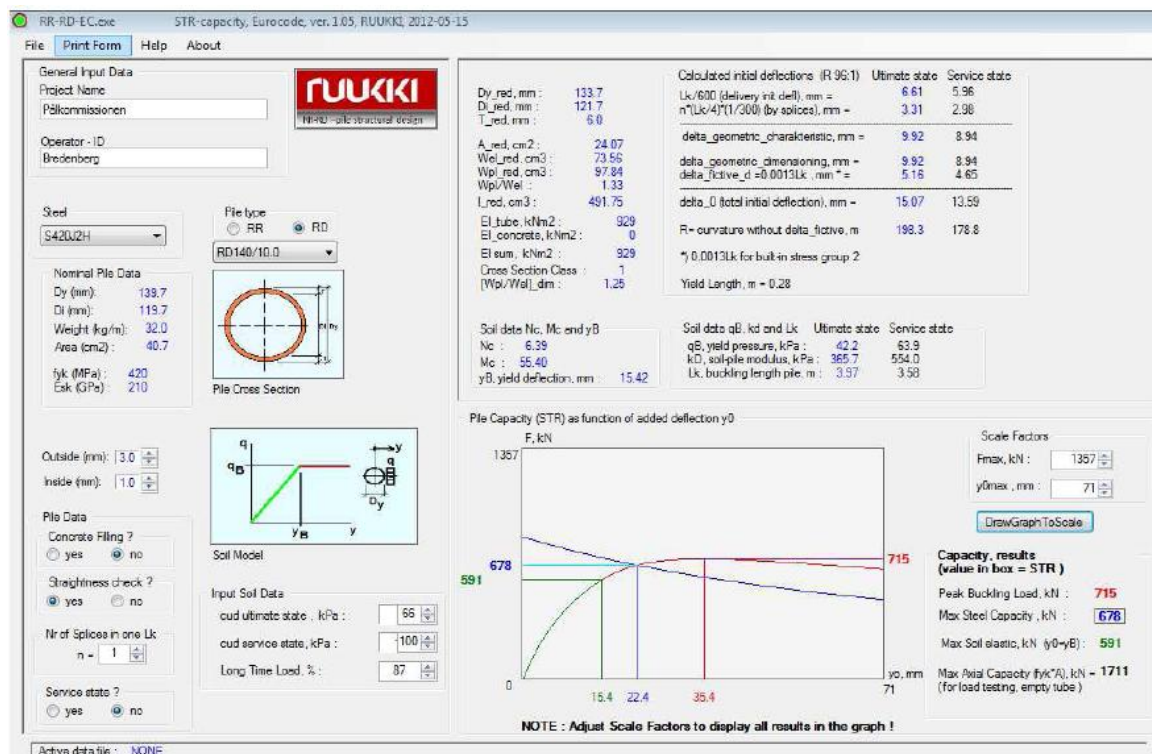
Gällande praxis för dimensionering av slanka pålar

Under lång tid gällde att pålar i allmänhet dimensionerades enbart för den axiella belastning som skulle tas upp av pålgrundläggningen. Lasten beräknades som summan av nominella värden av ständiga och tillfälliga lastkomponenter. Storleken av påltvärsnittet bestämdes sedan genom division

med en "tillåten påkänning". Denna erhöles genom att pålmaterialets tryckhållfasthet dividerades med en "säkerhetsfaktor", vars värde ofta var av storleksordningen 1.5 till 2.0. Det kan antas att en stor del av de pålar som installeras idag fortfarande dimensioneras på detta sätt (i den mån någon dimensioneringsberäkning alls utförs ...)

Med tiden har normer och regler för dimensionering modifierats på så sätt att nominell belastning har ersatts med "lasteffekter" (dimensionerande laster), vilkas storlek erhålls genom att karakteristiska (nominella) lastvärden multipliceras med lastfaktorer. Storleken av dessa faktorer avses återspegla osäkerheten i respektive typ av belastning. En lasteffekt är i allmänhet större än värdet för motsvarande karakteristiska last, d v s lastfaktorer är vanligen större än 1.0. För variabla laster kan dock värdet vara mindre än 1.0, exempelvis när flera olika laster kombineras till "lastfall".

För att undvika för stora skillnader i beräkningsresultat i jämförelse med äldre metoder har även regler för utnyttjande av pålmaterialet ändrats, i allmänhet på så sätt att högre utnyttjandegrad godtagits. Det sammantagna resultatet av uppdateringar av ändrade normer och regler har ofta blivit ett ökat utnyttjande av ett tvärsnitt av given storlek.



Exempel på praxis 2014, Ruukkis dimensioneringsprogram för stålrörspålar typ RR och RD.

Den övergripande principen för dimensioneringsarbete är i allmänhet att ur aspekten sannolikhet uppnå godtagbar marginal mot att skador, exempelvis för sådana orsakade av för stora rörelser eller materialbrott, ska uppkomma. Faktorer för beräkning av lasteffekter och utnyttjande av material beräknas därför oftast med tillämpning av matematisk statistik. Slutresultaten av sådan beräkning redovisas som faktorer för multiplikation (eller division) i normer och regler, med syftet att uppnå enkelhet och konformitet i det praktiska arbetet. I skrivande stund gäller i Sverige Eurokod som generellt norm- och regelsystem för påldimensionering.

Inverkan av pålars krokighet samt egenspanningar

Dimensionering av pålar skedde tidigare genom att enbart axialkraften i pålen beaktades. I den mån böjmoment i pålar togs med i beräkningarna så gällde det pålar som vid påltoppen förutsattes

belastade av moment eller horisontalkraft. Excentricitet vid påltopp och pålspets brukade inte heller tas med vid dimensionering.

Det var emellertid känt, genom mätningar, att pålar kunde ha betydande krokighet i marken. Bjerrum förmodade i en uppsats 1957 att avvikelser mellan beräknad och vid provbelastningar uppmätt knäcklast skulle kunna ha sin förklaring i en initiell utböjning av pålarna. Motsvarande inverkan på pålars kapacitet beskrevs i rapporter i Pålkommisionens rapportserie av Bengt Broms "Beräkning av vertikala pålars bärförmåga", 1965 och, "Pålars bärförmåga i elastiskt Medium under Hänsynstagande till Initialkrökning och Egenspänningar i Pålmaterialet", Stig Bernander & Ingemar Svensk, 1970. De senare angav att den för analysen relevanta utböjningen skulle relateras till pålens elastiska knäckningslängd, härledd av Forsell 1928.

Resultaten bearbetades och utvecklades i Pålkommisionens Rapporter 81 och 84a, m fl. Dessa insatser kan sägas utgöra grunden för dagens praxis för dimensionering av pålar.

Materialleverantörer, programutvecklare och inte minst konstruktörer har tagit fram och tillämpar beräkningsresultat som är grundade på ovan nämnda publikationer, se bilden på föregående sida. Den stora skillnaden jämfört med äldre beräkningspraxis är att pålar idag dimensioneras både för axiellt kraftangrepp och ett mot förutsatt utböjning svarande böjmoment.

Praxis innebär att innan yttre last påförs vid påltoppen så antas pålen i marken utböjd. Kraften mot påltoppen ökar sedan denna utböjning, vilket leder till uppkomsten av ett böjmoment. Pålens maximala kapacitet med avseende på tryckkraft anses motsvara antingen att påltvärsnittets kapacitet uppnås genom den kombinerade effekten av normalkraft och böjmoment, eller genom att pålen dessförinnan uppnår sin knäcklast. Detta synsätt är analogt med det som gäller för pelare och tryckta strävor i luft.

Förutsättningar som ingår i gällande praxis

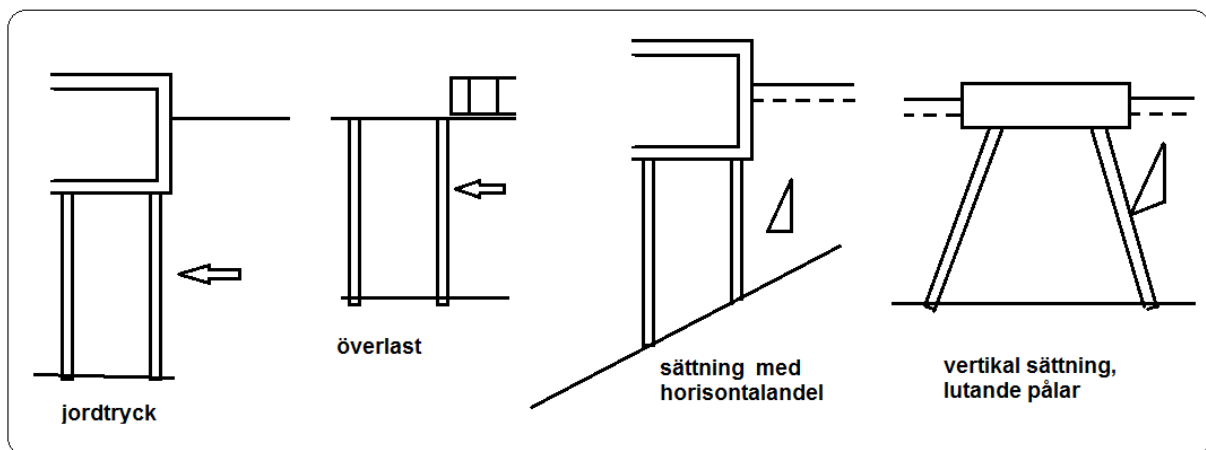
Med syftet att förenkla såväl teoretisk analys som beräkningsarbetet finns i gällande praxis ett antal förenklingar, vilka kan beskrivas som följer;

- pålens initiella utböjning är en sinusfunktion.
- pålen böjer ut i ett och samma horisontalplan.
- pålen är oändligt lång.
- pålen har konstanta egenskaper (diameter, böjstyvhet).
- axialkraften i pålen är konstant.
- pålen är ledat – styrd infäst vid toppen och spetsen.
- normalkraftens excentricitet vid pålens topp och spets är lika med noll.
- jorden kring pålen har konstanta egenskaper längs pålen.
- jordens elastiska respons är i varje punkt proportionell mot utböjningen (Winkler-underlag)
- böjspänningar i pålen före belastning antas vara lika med noll
- inverkan av tvärkraft försummas
- pålen är i sin helhet belastad av yttre, från jorden överförda, krafter.

Den sista punkten i listan är anmärkningsvärd. För de flesta konstruktionselement där tryckande axialkraft förekommer, så är det mycket viktigt att beakta inverkan av transversell belastning, om inte tryckkraften är mycket liten.

Orsaken till att det är viktigt att beakta både tryckkraft och sidolast är förstås att både utböjning och böjmoment kraftigt påverkas av axialkraftens storlek, närmare bestämt förhållandet mellan kraften och knäcklasten. Om tryckkraftens storlek är tillräckligt nära knäcklasten så leder även en liten ökning av en sidolast till mycket stor ökning av böjmoment och utböjning, exempelvis för balkar (så kallade beam-columns) och plattor.

Även om pålar många gånger saknar sidolast, vilket kan berättiga den nämnda förenklingen, så är sidobelastning mot pålar långt ifrån ovanlig, se bilden nedan.



Exempel på situationer där det uppkommer sidobelastning på pålar

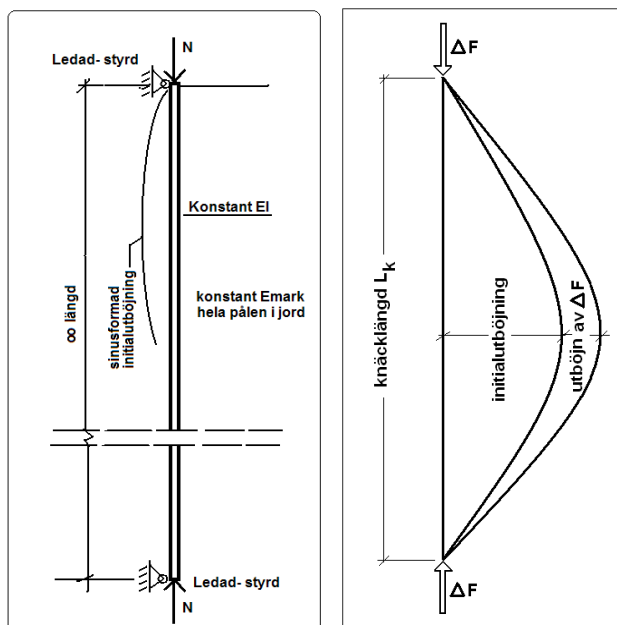
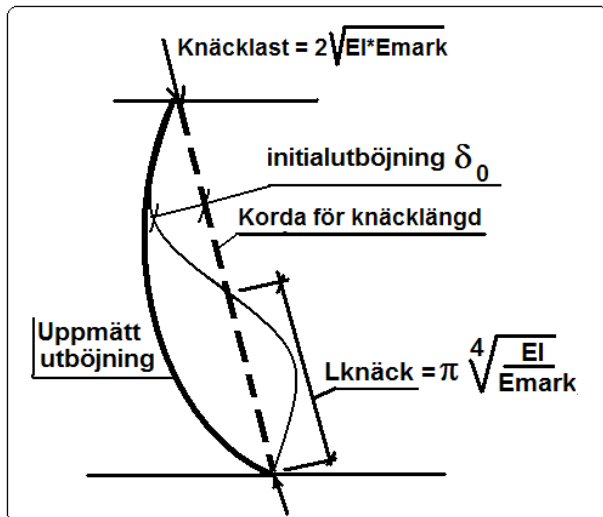


Bild visande antagna egenskaper för pålberäkningar enligt praxis 2014. Initialutböjning avsätts på knäcklängden. När axiell kraft påförs så uppkommer tillskottsutböjning. Utböjningen i en punkt utgörs av summan av initialutböjning och tillskottsutböjning.



Initialutböjning mäts på pålens knäcklängd, inte hela pållängden, enligt gällande praxis 2014. Med EI avses pålens böjstyvhetsmoment, kNm^2 . Med E_{mark} avses markens E-modul, exempelvis 50*odränerad skjuvhållfasthet, $\text{kPa} = \text{kN/m}^2$. En närmare beskrivning av denna faktor ges senare i rapporten. Med nämnda storheter erhålls Knäcklasten i sorten kN .

Utöver ovan nämnda förenklingar, som är förknippade med beräkningsmodellen, tillämpas vid dimensionering av pålar även andra förenklingar. Exempelvis brukar inverkan av utmattning vid installation försummas, eller anses motsvara ett schablonvärde vars relevans i det enskilda fallet inte brukar verifieras.

Knäcklasten beräknas enligt bilden nedan, enligt Rapport 84a, där virtuella arbetets princip används för beräkning istället för, som i Rapport 81, med ekvivalent bäddmodul.

Samband mellan axiellast P och tillskottsutböjningen y_0 enligt Rapport 81, ekv. 3.4:

$$P = 2\sqrt{k_d \cdot D_y \cdot EI \cdot \Phi(y_0)} \cdot \frac{y_0}{y_0 + \delta_0}$$

$\Phi(\alpha)$ beaktar plasticering i omgivande jord ($\Phi = 1,0$ för $y_0 < y_B$) rapport 84a, ekv 47:

$$\alpha(y_B / y_0) = \arcsin(y_B / y_0)$$

$$\Phi(\alpha) = \frac{2}{\pi} \left(\alpha + 1.5 \sin(2\alpha) - (\pi - 2\alpha) (\sin(\alpha))^2 \right)$$

Samband mellan moment och axiellast enligt Rapport 81, sidan 46:

$$M = P \cdot \frac{\delta_0 + y_0}{2}$$

Beräkning av knäcklast enligt pålkommissionens Rapport 81 och 84a.

Beräkningsgången illustreras i bilden nedan. Knäcklast och stuklast beräknas för successivt ökande värden för tillskottsutböjningen. Pålens knäcklast har ett maxvärde vid en viss tillskottsutböjning. Om stuklasten vid denna utböjning är större än knäcklasten så inträffar beräkningsmässigt knäckning där. Om istället stuklasten, vid mindre tillskottsutböjning än den som motsvarar knäckning, där är mindre än motsvarande knäcklast så sker stukbrott där. Det senare fallet innebär alltså att stukning dimensionerar.

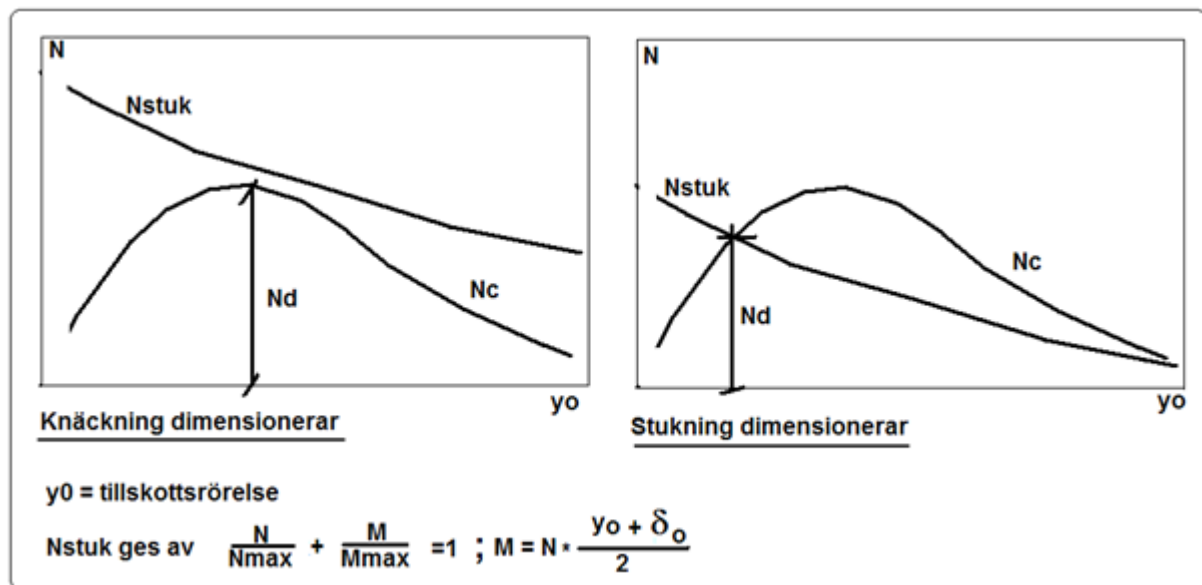


Bild som visar hur pålens kapacitet bestäms av det minsta av värdena för knäcklast (N_c) respektive stuklast, beroende på hur stor tillskottsutböjningen är för uppnåendet av knäcklastens peakvärde. $N_{\max}$ och $M_{\max}$ betecknar påltvärsnittets kapacitet med avseende på axialkraft respektive böjmoment. För bruksgränstillstånd brukar kapacitet motsvarande elastiskt tillstånd föreskrivas. För brottgränstillstånd och olycksfallstillstånd tillgodoses plasticering för både jord och pålmaterial.

Kravspecifikation för ny metod

Den nya metoden ska i så stor utsträckning som möjligt eliminera de förenklingar som finns i uppräkningsmetoden ovan. Vidare ska presentationen vara sådan att det på samma sätt som idag är möjligt att relativt enkelt ta fram beräkningsverktyg för användning i det dimensioneringsarbete som dagligen utförs och som bildar underlag för majoriteten av de val av påltyp och påldimensioner som utförs.

Med utgångspunkt från listan som visar förenklande antaganden så kan en kravspecifikation för en förbättrad beräkningsmetod formuleras som följer:

- godtycklig initiell utböjning, även vinkeländringar i skarvar
- pålen böjer ut i tre dimensioner (3D).
- pålen kan ha godtycklig längd.
- pålens egenskaper (diameter, böjstyvhet) kan variera.
- axialkraften längs pålen kan variera.
- pålen kan ha varierande randvillkor vid toppen och spetsen, t ex inspänd + ej styrd.
- jorden kring pålen kan ha varierande egenskaper längs pålen.
- jordens respons i varje punkt kan motsvara annan modell än Winklerunderlag.
- böjspänningar i pålen före belastning antas motsvara antagen initiell utböjning
- inverkan av sidolast, exempelvis av att jord rör sig i sidled mot/omkring pålen.
- inverkan av tvärkraft

- annan jordmodell än Winkler-omgivning, exempelvis hardening-soil, small strain, creep.
- beaktande av 3D, alltså utböjning i tre dimensioner istället för i ett plan.

Inverkan av ändrad praxis

Ett motiv till att behålla Winkler-responsen är att mer avancerade jordmodeller många gånger på ett ingenjörsmässigt godtagbart sätt kan efterliknas med Winkleromgivningen, och att de jordegenskaper som ingår i komplexa jordmodeller i de flesta fall mest blir en uppskattning, därför att motsvarande utvidgade bestämningar av jordegenskaper inte utförs (moduler och parametrar relaterade till hållfasthet bedöms t ex ofta schablonmässigt från sonderingsdata). Försummande av tvärkraftens inverkan kan motiveras med att beaktande av tvärkraften normalt har liten inverkan på resultatet.

Man ställer sig frågan huruvida införande av beskrivna ändringar i praxis automatiskt leder till högre kapacitet för pålar. Svaret är att i vissa fall kan istället lägre beräknad kapacitet bli resultatet.

En fördel med utvidgad praxis är att nya typer av pålar kan bli aktuella, exempelvis pålar med olika tvärsnitt på olika delar av pålen. Exempelvis kan ett starkare tvärsnitt användas där marken har lägre hållfasthet medan ett annat tvärsnitt används där marken har större bärförmåga.

Generella krav för dimensionering

Att pålar, i likhet med andra bärande konstruktionselement, ska ha en godtagbar marginal mot att "kollapsa" är en vedertagen förutsättning. Denna kvantifieras i gränstillstånd brottgränstillstånd och olycksfallstillstånd. Dessutom gäller att pålens rörelser, i första hand vid påltoppen, vid normalt utnyttjande av pålen inte ska vara så stora att funktionen som pålen ska ha inte uppfylls. När utnyttjandet av pålen då uppnår gränsen för vad som accepteras så har man uppnått största påverkan inom bruksgränstillståndet. Att upprepade på- och avlastningen inte ska medföra successivt ökad kvarstående rörelse hos pålen är ett självklart krav.

I de byggregler som gäller vid ett visst tillfälle så specificeras de marginaler som ska gälla. Vanligen är det fråga om olika koefficienter som ska säkerställa vissa statistiska förutsättningar beträffande sannolikheten för att det blir fråga om att förutsatt funktion inte uppnås.

I praktiken kan det vara ganska oklart vad som egentligen är det ena eller andra tillståndet: Om exempelvis sjunkningen av påltoppen blir så stor att oacceptabel sprickbildning uppkommer i den konstruktion som vilar på pålen så kan det uppfattas både brott, utan att brott i en generell uppfattning uppkommit i pålen. Olika uppfattningar brukar härvidlag ställas mot varandra i en tvistsituation.

Från ingenjörsmässig synpunkt är en av de väsentligaste egenskaperna hos pålen att påltoppen inte sjunker för mycket, obeaktat gränstillstånd. Pålens "bärförmåga" är nära förknippad med hur mycket påltoppen rör sig för en viss belastning där. I allmänhet är det fråga om en vertikal kraft ("lasteffekt") vid toppen och tillika en vertikal rörelse, men påltoppen kan även belastas och röra sig på annat sätt, exempelvis horisontellt som resultat av ett transversellt lastangrepp eller ett moment i närheten av pålens överände. Rörelser vid påltoppen kan också orsakas av att jorden kring pålen rör sig i förhållande till pålen, exempelvis genom konsolideringsrelaterade markrörelser.

Pålar kan i högre grad än många andra bärande konstruktionselement uppvisa betydande krypning och förändringar i egenskaper beroende på cyklisk last, dvs i tiden varierande egenskaper.

En modell med sikte på att beräkna en påltopps rörelser för alla tänkbara faktorer som påverkar beteendet kan knappast formuleras med en rimlig grad av tillämpbarhet. Föreslagen modifierad modell avser därför vertikal belastning mot påltoppen samt motsvarande vertikal rörelse där. På så

sätt så kan avgöras om "bärförmågan" är tillräcklig, i flertalet fall där grundläggning på pålar är aktuell. Modellen är "kodneutral", men de bestämmelser som gäller för förstoring av angripande krafter för beräkning av lasteffekter liksom reduktion av "karaktäristisk" hållfasthet för erhållande av dimensionerande kapacitet enligt gällande regelverk (exempelvis "eurokod") förutsätts beaktad.

Faktorer som påverkar utformning av modifierad pålberäkningsmodell

Dagens (och morgondagens) dimensioneringsarbete förutsätter beräkningar med dator. De begränsningar som gällde tidigare, och som bl a medförde utvecklandet av grafiska och numeriskt starkt förenklade metoder, finns idag inte längre. Det är alltså idag ingen nackdel om den teori som bildar stommen i en beräkningsmodell är så komplex att handberäkningar är uteslagna.

Istället gäller kravet på enkelhet och användaranpassning mer att beräkningsmodellen ska presenteras i en form som medger produktionsmässigt godtagbar mängd arbete vid användningen.

Vägledande för framtagandet av en modifierad modell för påldimensionering för slanka pålars bärförmåga är därför att redovisa en modell som är tillräckligt enkel att arbeta med samtidigt som den ger en signifikant förbättring beträffande efterliknandet av verkliga förhållanden. De verktyg som konstruktörer i allmänhet kan använda är kalkylprogram typ Excel, matematikpaket typ MathCad samt högnivåspråk typ C++, C# och VB.Net, exempelvis implementerade i MS Visual Studio.

Det är därför en strävan att redovisa modellegenskaper i uttryck som inte kräver översättning av analytiska lösningar (integraler, differentialekvationer) till för beräkningar användbar numerisk form. Vidare förutsätts användare inte ha kunskaper i linjär algebra, exempelvis till hantering av matriser, för att kunna utföra beräkningar med modellen som grund.

Tillgängliga beräkningsmetoder

Bilaga 1 visar bakgrunden till den "klassiska" beräkningsmetoden, på vilken dagens beräkningspraxis vilar och som utgör grunden för de rapporter i Pålkommisionens rapportserie som avser beräkning och dimensionering av pålar med avseende på knäckning. Som framgår där så erbjuder det inga problem att räkna med pålar med ändlig längd, med den klassiska metoden.

Bilaga 2 visar uttryck för beräkning av samband mellan bäddmodul för påle och markens E-modul, Winklerunderlag. Medan E-modulen för marken inte antas bero av storleken av den jordvolym som betraktas så är bäddmodulen (Winklerunderlagets fjäderkonstant) för pålen beroende av pålens bredd eller diameter. Emellertid så brukar man enbart ta med hoptryckning hos intill ett avstånd lika med pålens sidmått eller diameter, varvid jordens och pålens modul får samma numeriska värde, såsom visas i bilaga 2.

Bilaga 3 visar hur pålomgivningens modul enligt gällande praxis beräknas för olika belastningstid samt hur jordmotståndet modelleras som ett elastiskt-plastiskt material, i analogi med vad som brukar antas för stål, betong och andra konstruktionsmaterial.

I bilaga 4 visas inverkan av olika randvillkor och pållängd, klassisk teori, Winklerunderlag. Man kan notera att i det fall påltoppen är "fri" (inte är ledat infäst och inte fasthållen mot rörelse vinkelrät mot pålaxeln) så är knäcklasten hälften mot värdet för en påle med de randvillkor som brukar antas gälla upptill, d v s ledad-styrd infästning.

Bilaga 5 redogör för Vianellos metod för beräkning av knäcklast. När en strävas tvärsektion har olika styvhet på olika avsnitt för strävan så kan analytiska lösningar erhållas för vissa sådana konfigurationer. En mer generell metod brukar tillskrivas Vianello, 1898, fastän den först publicerades av Essenger 1893. Italienaren Vianellos insats var att beskriva en grafisk metod för beräkningsarbetet. Metoden var i det närmaste empirisk såtillvida att det dröjde tills 1923 då det

matematiskt bevisades under vilka fÅrutsÅttningar den iterativa metoden konvergerade mot knÅcklasten.

BerÅkningsarbetet startas med att strÅvan delas in i delar med konstant bÅjstyvhet EI. DÅrefter antas en utbÅjningsfigur dÅr den stÅrsta utbÅjningen har vÅrdet 1. Vanligen vÅljs initialt en triangulÅr utbÅjning. Sedan berÅknas momentet vid varje element nÅr en axiell tryckande kraft $=1$ pÅfÅrs varje Ånde av strÅvan. Det erhÅllna momentdiagrammet dividerat med respektive elements bÅjstyvhet infÅrs sedan i en ny berÅkning som belastning pÅ strÅvan. Man berÅknar "momentet av momentet". Det nya momentdiagrammet innehÅller utbÅjningsvÅrden fÅr respektive element.

NÅmnda berÅkningsgrepp brukar kallas inom byggstatiken ofta fÅr "konjugatbalkmetoden". Det inverterade vÅrdet av den stÅrsta berÅknade utbÅjningen utgÅr ett vÅrde pÅ den sÅka knÅcklasten.

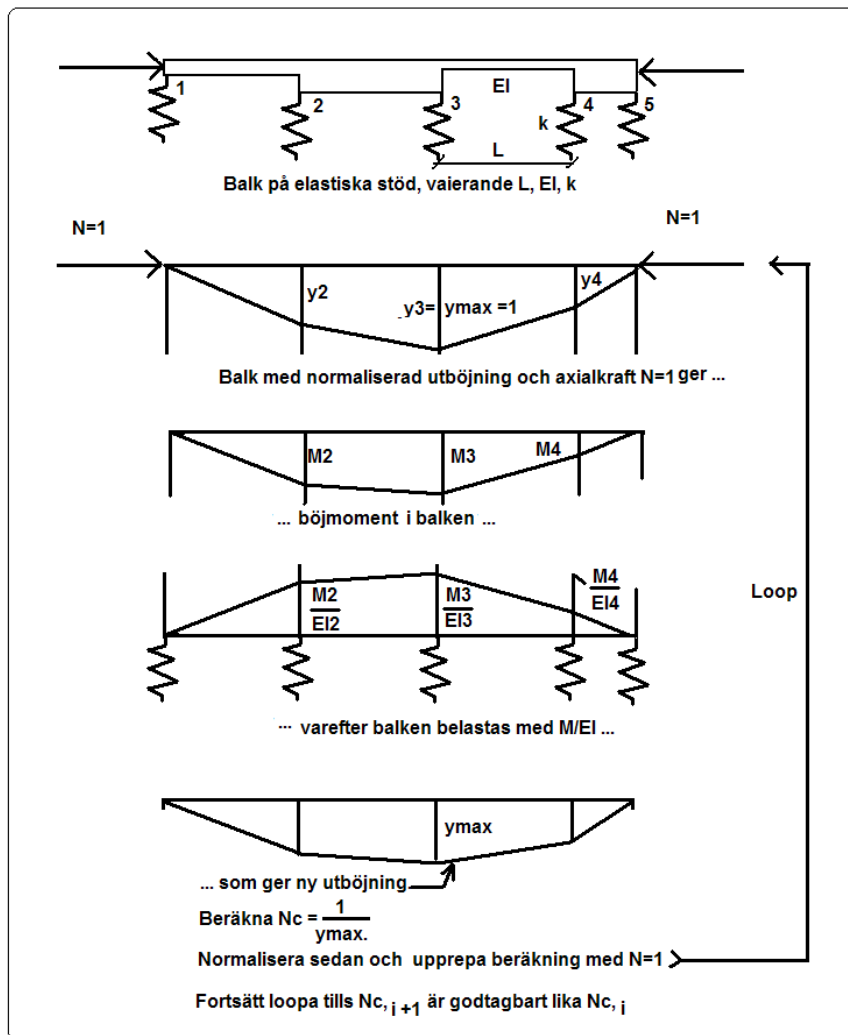
Efter det att knÅcklasten berÅknats som det inverterade vÅrdet av den stÅrsta utbÅjningen sÅ "normaliseras" utbÅjningsvÅrdena sÅ att stÅrsta utbÅjningen fÅr vÅrdet $= 1$. Sedan utfÅrs en ny berÅkningssekvens med den nya uppsÅttningen utbÅjningar som utgÅngspunkt.

Iterationerna fortsÅtts till avvikelser i berÅknad knÅcklast fÅr tvÅ pÅ varandra fÅljande (konsekutiva) berÅkningssteg År godtagbart liten.

I Bilaga 5 visas en detaljerad beskrivning av Vianellos metod tillsammans med exempel pÅ hur den kan tillÅmpas fÅr berÅkningsarbete. Som framgÅr sÅ lÅmpar sig metoden fÅr numerisk implementering.

FÅr att man ska kunna tillÅmpa Vianellos metod pÅ en balk som År elastiskt understÅttad krÅvs uppenbarligen en metod som beaktar stÅdelasticiteten. Genom att vÅlja mycket smÅ avstÅnd mellan stÅden sÅ kan en balk i kontinuerlig elastisk omgivning av Winkler-typ efterliknas.

Algoritmen illustreras i figuren nedan.



BerÅkning av knÅcklast fÅr balk pÅ elastiska stÅd enligt Vianellos metod

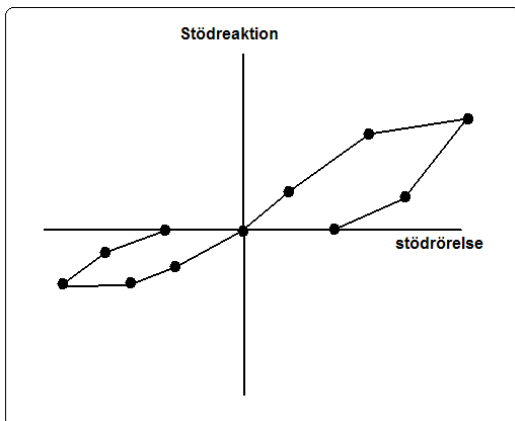
Bilaga 6 visar hur utbÅjningar fÅr en balk pÅ elastiska stÅd kan berÅknas. Som framgÅr av figuren ovan sÅ behÅvs en procedur fÅr berÅkning av stÅdmoment fÅr en balk pÅ elastiska stÅd. En effektiv och beprÅvad sÅdan metod ("5-momentekvationen") visas i bilaga 6. UtÅver en beskrivning av 5-momentekvationen visas hur den implementeras sÅ att en symmetrisk, kvadratisk, bandmatris skapas. FÅr de flesta vÅrden som År aktuella fÅr bÅjstyvhet, spÅnnvidder och fjÅderkonstanter sÅ År matrisen positivt definit, vilket innebÅr att direkt Gausselimination (utan pivotring) dÅ kan anvÅndas fÅr att lÅsa det resulterande ekvationssystemet, dÅr alltsÅ stÅdmomenten utfÅr de obekanta storheterna. Den metoden År den snabbaste fÅr aktuell typ av berÅkning.

Den kontinuerliga omgivningen kring strÅvan efterliknas genom att stÅden sÅtts tÅtt. Man kan visa att nÅr avstÅndet mellan stÅden gÅr mot noll (limesÅvergÅng) sÅ gÅr lÅsningen mot det exakta vÅrdet fÅr en balk pÅ kontinuerligt Winklerunderlag. Genom att man kan variera parametrarna L , EI och k inom vida grÅnser sÅ kan i stort sett vilken kombination som helst av pÅl- och balkegenskaper efterliknas.

FÅr att komma nÅrmare fallet en balk pÅ elastiskt underlag som inte År ett Winklerunderlag utan istÅllet ett elastiskt kontinuum (som inte tar slut vid balkÅndarna) kan fjÅderbÅdden nÅrmare balkÅndarna modifieras enligt ett examensarbete utfÅrt vid CTH, ref (10).

Det År ocksÅ mÅjligt att anvÅnda andra samband Ån linjÅra sÅdana mellan stÅdkraft och stÅdnedsjunkning, d v s ges av uttrycket fjÅderkonstanten $k = \text{stÅdkraft} / \text{stÅdnedsjunkning}$. Man kan

dÅ ge varje stÅd individuella, ej linjÅra samband kraft-rÅrelse genom infÅrande av tabeller med sÅdana vÅrden, se figuren nedan.



Punktvis beskrivning av samband stÅdreaktion - stÅdrÅrelse, t ex frÅn provning.

Redovisad berÅkningsmetodik kan uttryckas mer koncist med analytiska uttryck, exempelvis sÅdana grundade pÅ virtuellt arbete (arbetet fÅr yttre krafter = arbetet fÅr inre krafter). FÅr mÅnga blir dÅ den formaliserade framstÅllningen ganska svÅr att fÅrstÅ och anvÅnda eftersom det krÅvs kunskaper inom omrÅdena linjÅr algebra, integraler, m m. Det torde vara lÅttare att fÅrstÅ hÅrledningar som grundas pÅ mer vÅlkÅnda samband. Oavsett framstÅllning sÅ mÅste ungefÅr samma berÅkningsarbete genomfÅras, exempelvis nÅr analytiska uttryck ÅversÅtts till numeriska sÅdana.

BerÅkningsarbetet kan utgÅras av berÅkning av lÅgsta egenvÅrde fÅr en matris. Man kommer till samma uppsÅttning rÅknearbete om man diskretiserar exakta differentialekvationer som om man anvÅnder en mer ingenjÅrsmÅssigt inriktad formulering. Man kan ocksÅ visa att det motsatta År sant, d v s exakta uttryck erhÅlls med utgÅngspunkt frÅn numeriska uttryck.

Bilaga 7 visar hur differentialekvationen fÅr en strÅva i Winkleromgivning representeras med differensuttryck sÅ att varierande bÅjstyvhet hos strÅvan och varierande styvhet hos omgivningen kan beaktas.

Bilaga 1.

Klassisk berÅkningsmetod

Axiellt belastad strÅva i elastisk omgivning.

$p = \text{tryck mot underlaget}$
 $q_x = \text{jÄmnt fÅrdelad belastning pÅ elementet } dx$

$$q_x \cdot dx = H_1 - H_2 - p \cdot dx$$

ger

$$q_x \cdot dx = F \cdot \frac{dy}{dx} - F \cdot \frac{dy}{dx} - F \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx - p \cdot dx$$

$$q_x = -F \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - p$$

$$q_x = -F \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - c \cdot y \quad \dots (1)$$

Elastiska linjens ekvation $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$

ger efter mult. med $\frac{d^2}{dx^2}$: $EI \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{d^2M}{dx^2}$

sambandet $\frac{d^2M}{dx^2} = -q_x$ ger $EI \frac{d^4y}{dx^4} = q_x$

insÅttniing i (1) ger

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + F \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + c \cdot y = 0$$

infÅr $k^2 = \frac{F}{EI}$ och $\alpha^4 = \frac{c}{EI}$:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + k^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^4 y = 0 \quad \dots (2)$$

med $\lambda_1 = \sqrt{\frac{k^2}{2} - \sqrt{\frac{k^4}{4} - \alpha^4}}$ och $\lambda_2 = \sqrt{\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} - \alpha^4}}$

sÅ lÅder lÅsningen till ekv. (2):

$$y = A \cos(\lambda_1 x) + B \sin(\lambda_1 x) + C \cos(\lambda_2 x) + D \sin(\lambda_2 x) \quad \dots (3)$$

A, B, C och D bestÅms av randvillkoren
FÅr ledat-styrda Åndar se nedan

Axiellt belastad strÅva i elastisk omgivning. Ledade, styrda Åndar.

$y = A \cos(\lambda_1 x) + B \sin(\lambda_1 x) + C \cos(\lambda_2 x) + D \sin(\lambda_2 x)$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k^2}{2} - \sqrt{\frac{k^4}{4} - \alpha^4}} \quad \text{och} \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} - \alpha^4}} \quad \dots (3)$$

$$k^2 = \frac{F}{EI} \quad \text{och} \quad \alpha^4 = \frac{c}{EI}$$

$y' = -A \lambda_1 \sin(\lambda_1 x) + B \lambda_1 \cos(\lambda_1 x) - C \lambda_2 \sin(\lambda_2 x) + D \lambda_2 \cos(\lambda_2 x)$

$y'' = -A \lambda_1^2 \cos(\lambda_1 x) + B \lambda_1^2 \sin(\lambda_1 x) - C \lambda_2^2 \cos(\lambda_2 x) + D \lambda_2^2 \sin(\lambda_2 x)$

$y(0) = 0$ ger $0 = A + C \quad \dots (1)$

$y''(0) = 0$ ger $0 = -A \lambda_1^2 - C \lambda_2^2 \quad \dots (2)$

(1) ger $A = -C$;
 insÅttniing i (2) ger $C (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0$
 $\therefore C = 0 \quad \therefore A = 0$

$y(L) = 0$ och $y''(L) = 0$ ger dÅ fÅljande ekv-system:

$$\begin{cases} B \sin(\lambda_1 L) + D \sin(\lambda_2 L) = 0 \\ B \lambda_1^2 \sin(\lambda_1 L) - D \lambda_2^2 \sin(\lambda_2 L) = 0 \end{cases}$$

ekv-systemet i matrisform:

$$\begin{pmatrix} \sin(\lambda_1 L) & \sin(\lambda_2 L) \\ \lambda_1^2 \sin(\lambda_1 L) & -\lambda_2^2 \sin(\lambda_2 L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d v s
 $\lambda_1 L = n \cdot \pi$ och/eller $\lambda_2 L = n \cdot \pi$; $n = 1, 2, \dots$

SÅtt in $\lambda_1 = \frac{n \cdot \pi}{L}$ i ekv (3) sÅ erhÅlls $\frac{n \cdot \pi}{L} = \sqrt{\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} - \alpha^4}}$

$$\frac{n \cdot \pi}{L^2} = \frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} - \alpha^4}; \quad \frac{n \cdot \pi}{L^2} \cdot \frac{k^2}{2} = \sqrt{\frac{k^4}{4} - \alpha^4}; \quad \frac{4 \cdot n \cdot \pi}{L^4} \cdot \frac{n \cdot \pi}{L^2} \cdot \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{4} = \frac{k^4}{4} \cdot \alpha^4$$

$$k^2 = \frac{n \cdot \pi}{L^2} + \frac{L^2}{2 \cdot n \cdot \pi} \alpha^4$$

sÅtt in k^2 och α^4 :

$$F = \frac{n \cdot \pi^2 EI}{L^2} + \frac{L^2 c}{2 \cdot n \cdot \pi} = F_{ke} + F_{ku}$$

FÅr att ett utbÅjt jÅmviktslÅge $y \neq 0$ ska existera krÅvs att $B \neq 0$ och $D \neq 0$. Detta innebÅr att:

$$\det \begin{vmatrix} \sin(\lambda_1 L) & \sin(\lambda_2 L) \\ \lambda_1^2 \sin(\lambda_1 L) & -\lambda_2^2 \sin(\lambda_2 L) \end{vmatrix} = 0$$

som ger:

$$\sin(\lambda_1 L) \cdot (-\lambda_2^2 \sin(\lambda_2 L)) - \lambda_1^2 \sin(\lambda_1 L) \cdot \sin(\lambda_2 L) = 0$$

$$(\lambda_2^2 + \lambda_1^2) \sin(\lambda_1 L) \cdot \sin(\lambda_2 L) = 0$$

lÅsningar:

$$(\lambda_2^2 + \lambda_1^2) \neq 0 \text{ innebÅr att } \sin(\lambda_1 L) \cdot \sin(\lambda_2 L) = 0$$

Axiellt belastad stråva i elastiskt medium, led-led, forts

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} + \frac{L^2 c}{n^2 \pi^2} = F_{ke} + F_{ku} \quad \dots (1)$$

n = antal halv-vågor.

F_{ke} = knäcklast för fri stråva. F_{ke} ökar med ökande n .

F_{ku} = ökning av käcklast av elastisk omgivning.
 F_{ku} minskar med ökande n .

Beräkna därför n för $F = \min$;

$$\frac{dF}{dn} = \frac{2n \pi^2 EI}{L^2} - \frac{2L^2 c}{n^3 \pi^2} ;$$

$$\frac{dF}{dn} = 0 \text{ ger}$$

$$\frac{n \pi^2 EI}{L^2} = \frac{L^2 c}{n^3 \pi^2} ;$$

$$n^4 \pi^2 EI = L^4 c ;$$

$$n = \frac{L}{\pi} \sqrt[4]{\frac{cEI}{L^4}} ; \text{ välj } n \text{ som närmaste heltal}$$

; insättning i (1) ger

$$F = \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \sqrt{\frac{c}{EI}} \cdot \frac{\pi^2 EI}{L^2} + \frac{L^2 c}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2 EI}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{c}{EI}} ;$$

som ger $F = 2\sqrt{cEI} \quad \dots (2) \quad ; \quad L = n \pi \sqrt[4]{\frac{EI}{c}} \quad \dots (3)$

Figur. $\gamma = f(\psi)$

Beräkning

1. Välj L , E och c

2. Beräkna $n = \frac{L}{\pi} \sqrt[4]{\frac{cEI}{L^4}} ;$ välj n som närmaste heltal

3. Beräkna $F_{ke} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$

4. Beräkna $F_{ku} = \frac{L^2 c}{n^2 \pi^2}$

5. Beräkna $F = F_{ke} + F_{ku}$

6. Beräkna som kontroll $F = 2\sqrt{cEI}$

... som jämförelse även följande :

7. Beräkna $\psi = \sqrt{\frac{cL^4}{EI}}$

8. Beräkna $\gamma = \frac{F}{F_{ke}} ;$

; motsvarar $F = \gamma \cdot \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

; motsvarar $F = \frac{\pi^2 EI}{(\beta L)^2} ; \beta = \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$

Resultat

$\psi = \sqrt{\frac{cL^4}{EI}}$	$n = \text{antal halv-vågor.}$
0 - 19.7	1
19.7 - 59.2	2
59.2 - 118.4	3

Vid ökande $\frac{c}{EI}$ konvergerar F mot $F = 2\sqrt{cEI} ;$ (se figuren)

anm: $F = 2\sqrt{cEI}$ är alltid lägre än det exakta värdet enl ekv (1) (se figuren).

Exempel:

RD 170/10 $EI = 3824 \text{ kNm}^2$ $c_u = 500 \text{ kPa} ;$

$L, \text{ m}$	ψ	n	$F_1 \text{ (exakt), MN}$	$F_3 = 2\sqrt{cEI}, \text{ MN}$
5	9.0	1	$1.51 + 1.27 = 2.78$	2.77
10	36.2	2	$1.51 + 1.27 = 2.78$	2.77
20	144.6	3	$1.51 + 1.27 = 2.78$	2.77

anm:

skillnad F_1/F_3 max ca 25 % (t ex för $\psi = 19.7$);
t ex ;

7.10 18.2 1 $0.75 + 2.55 = 3.30$ 2.77 ; 20 %
7.38 19.7 1 $0.69 + 2.76 = 3.45$ 2.77 ; 25 %

Bilaga 2

Samband mellan bÅddmodul fÅr pÅle och markens E-modul, Winklerunderlag

Man utgÅr frÅn sambandet

$q = c \cdot y$, dÅr q =trycket mot ytan av en elastisk halvrymd, y = nedpressningen av ytan

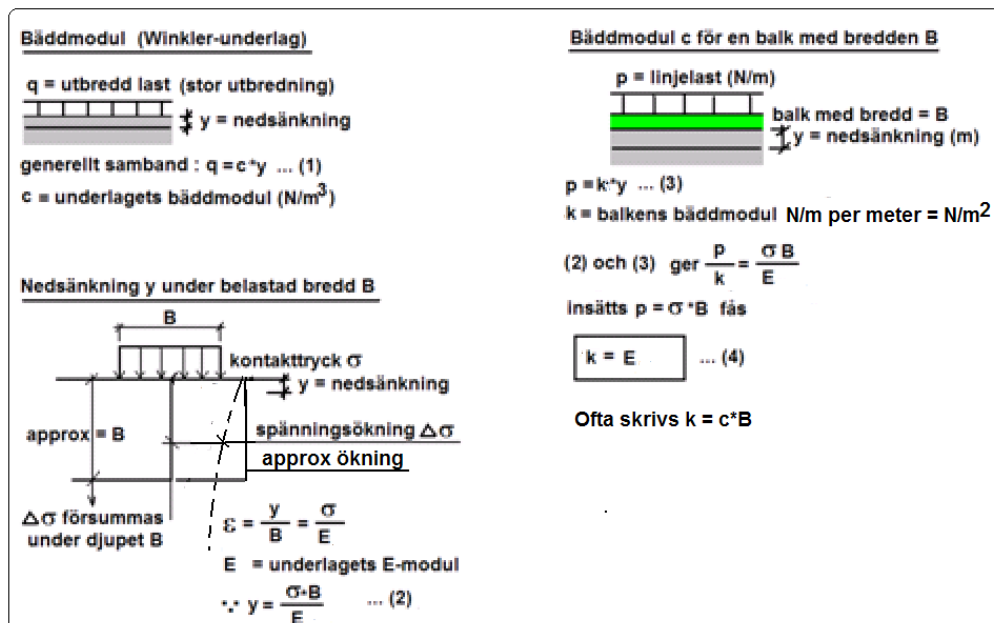
och c = en proportionalitetskonstant, vanligen kallad bÅddmodulen

Eftersom tryck har sorten kraft per ytenhet (N/m) och nedpressning sorten lÅngd (m), sÅ har alltsÅ bÅddmodulen sorten kraft per volymenhet (N/m³).

En balk (eller strÅva) har en Åndlig bredd, hÅr betecknad b . Det antas att balkens utbÅjning sker i ett plan vinkelrÅt mot och lÅngs balken, alltsÅ att sidan med bredden b pressar mot den elastiska omgivningen. Balkens elastiska understÅdning har sorten kraft per lÅngdenhet, N/m. Om markens bÅddmodul År c (N/m³) sÅ År balkens bÅddmodul $c \cdot b$, vilket motiverar beteckningen " cb " fÅr balkens elastiska understÅdning. TyvÅrr betecknas den ofta " c ", vilket kan ge upphov till missfÅrstÅnd.

Under balken minskar den vertikala (och horisontella) tryckÅkningen med Åkat avstÅnd frÅn kontaktytan mellan balk och elastiskt material i kontakt med balken. Det uppkommer en "lastspridning". Som approximation kan antas att spÅnningsÅkningen i det elastiska mediet År lika med noll pÅ avstÅndet ca $1.0 \cdot b$ frÅn kontaktytan.

Som visas pÅ bilden fÅr dÅ k = balkens bÅddmodul (N/m²) samma vÅrde som det elastiska underlagets bÅddmodul.



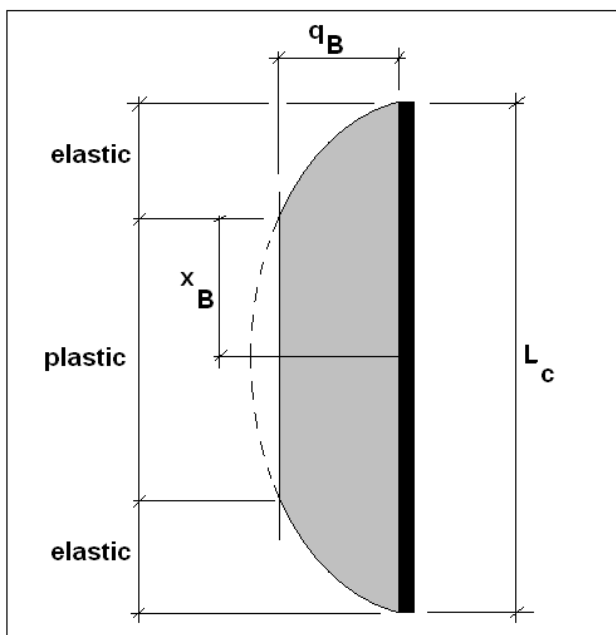
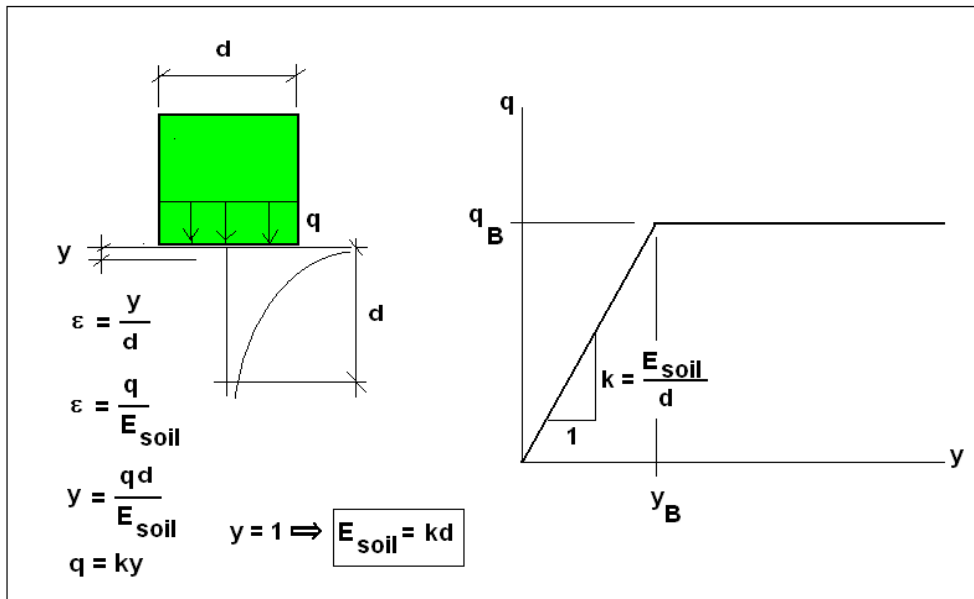
Samband mellan det elastiska underlagets bÅddmodul c (N/m³) och balkens bÅddmodul $cb=k$ (N/m²)

Notera att om balken delas upp i delar med lÅngden h sÅ blir fjÅderkonstanten fÅr varje del $k \cdot h$, N/m ((konstant bredd fÅrutsÅtts), om balken ska berÅknas som balk pÅ fjÅdrande stÅd.

Notera att inverkan av tvÅrkontraktionstalet fÅrsumrats i uttrycken ovan. Detta År brukligt dÅ man approximativt uppskattar sjunkning y under fundament med sidmÅttet B med uttrycket $y = q \cdot B / E$ (approx).

Bilaga 3

Elastisk-plastisk jordrespons samt jordmotst ndets tidsberoende



Definitions regarding deflection and contact pressure between pile and soil. L_c is the buckling length of the pile.

For cohesive soils E_{soil} is usually assumed to be a function $M(t)$ of the undrained shear strength and the time the pressure q acts (t is time) :

$$E_{\text{soil}} = M c_u$$

where c_u = undrained shear strength

$M = 50$ for long term loading

$M = 200$ for short term loading.

The soil is assumed to behave bilinear elastic-plastic, se fig. The yield pressure q_B is assumed to be a multiple of the undrained shear strength for cohesive soils,

$$q_B = N \cdot c_u$$

where $N = 6$ for long term loading

$$N = 9 \text{ for short term loading}$$

The value of the yield deflection y_B (fig) varies between

$$y_B = (6/50)d = 0.12d \quad \text{for long term loading}$$

and

$$y_B = (9/200)d = 0.045d \quad \text{for short term loading}$$

“Short” and “long” can be calculated from a consolidation calculation in horizontal direction. In that way, the soil permeability, the pile diameter and the time of loading can be considered. Of course, the meaning of “short” and “long” is quite different for a large diameter pile and a small diameter micro pile, respectively. Nevertheless, it is often assumed that “long time loading” means a load acting a week, or longer.

A linear variation between $M=50$ and $M=200$ is assumed and a time-factor T is defined as

$$T = 0 \text{ for short term loading}$$

$$T = 1 \text{ for long term loading}$$

or intermediate values, $0 < T < 1$, E_{soil} and y_B can be calculated as

$$E_{soil} = 200 / (1 + 3 \cdot T) \cdot c_u$$

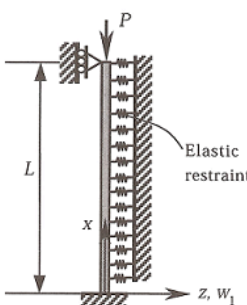
and

$$y_B = ((9 + 24T - 9T^2) / 200) \cdot d$$

The value of T is often expressed as a percentage, 0 % - 100 %. For buildings T use to be around 90 %, for railway bridges around 50 %.

Bilaga 4

Inverkan av olika randvillkor och pÅllÅngd enligt klassisk teori fÅr Winklerunderlag (ref 13, Wang m fl).



Med beteckningar enligt figuren År kan lÅsningen skrivas

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \alpha \frac{d^2 w}{dx^2} + \xi w = 0 \quad (2.6.1)$$

dÅr

$$x = \bar{x}/L,$$

$$w = \bar{w}/L,$$

$$\alpha = PL^2/(EI)$$

$$\xi = cL^4/(EI).$$

LÅsningen till ekv (2.6.1) lyder

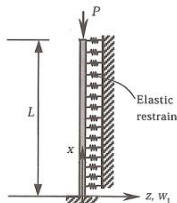
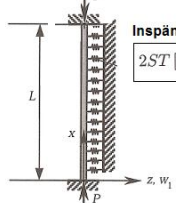
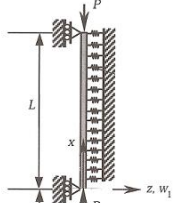
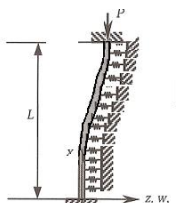
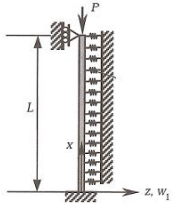
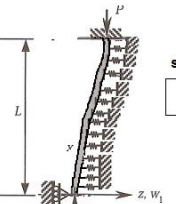
$$w = C_1 \cos(Sx) + C_2 \sin(Sx) + C_3 \cos(Tx) + C_4 \sin(Tx)$$

dÅr

$$S = \sqrt{\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \xi}}, \quad T = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \xi}} \quad (2.6.3)$$

Uttryck fÅr S och T fÅr olika randvillkor visas nedan.

KnÅcklasten P erhÅlls genom att det minsta vÅrdet fÅr α berÅknas genom passning efter det att vÅrden fÅr S och T enligt ovan satts in i respektive inramade uttryck i bilden nedan.

 InspÅnd nere och fri uppe $\left[\alpha (S^2 + T^2) - 2S^2 T^2 \right] \cos T \cos S - \alpha (S^2 + T^2) + (S^4 + T^4) + ST [2\alpha - (S^2 + T^2)] \sin T \sin S = 0$	 InspÅnd nere och uppe $2ST [\cos T \cos S - 1] + (T^2 + S^2) \sin T \sin S = 0$
 ledad-styrd uppe och nere $\sin T = 0$	 InspÅnd nere, inspÅnd-fri upptill ("svaj") $T \sin T \cos S - S \cos T \sin S = 0$
 InspÅnd nere, ledad-styrd uppe $T \cos T \sin S - S \sin T \cos S = 0$	 styrd-ledad nedtill, inspÅnd-fri upptill ("svaj") $\cos T = 0$

VÅrden S och T fÅr olika randvillkor fÅr strÅva i elastisk omgivning

Exempel:

Pålens bäddmodul- parameter	Knäcklastparameter $\alpha = PL^2/(EI)$	
	styrd-ledad uppe och nere	inspänd nere, styrd-ledad uppe
0	9.8696	20.1903
50	14.9357	24.2852
100	20.0017	29.3066

Exempel visande inverkan av olika randvillkor. Som framgår varierar knäcklastens storlek kraftigt med olika randvillkor. Felaktigt antagna randvillkor kan beräkningsmässigt ge såväl för liten som för stor knäcklast.

Bilaga 5. Vianellos metod för beräkning av knäcklast

Generell beskrivning

Metoden kan användas där det är svårt, eller inte möjligt, att beräkna knäcklasten för en sträva med enkel metod, alltså vid varierande tvärsnitt, laster angripande utefter strävan och liknande.

Metoden utgör en tillämpning av "successiva approximationsmetoden". För tillämpning på knäckningsproblem redovisades den först av Essenger, 1893. Vianello visade 1898 en grafisk metod för lösning, och det är alltså han som ofta anses vara upphovsmannen. Ett matematiskt bevis för metodens konvergens gavs 1923 av Trefftz.

En utböjning $y_0(x)$ för strävan ansätts. Ett momentdiagram motsvarande en tryckande normalkraft kan då beräknas. Balkens utböjning beräknas sedan för böjmomentet, vanligen med "konjugatbalkmetoden", vilket innebär att balken belastas med böjmomentdiagrammet dividerat med böjstyvhetsen EI . Motsvarande böjmomentdiagram utgör utböjningen $y_1(x)$ för det förstnämnda momentdiagrammet. Stödreaktionerna utgör stödvinkeländringarna för konjugatbalken

Genom att i en viss punkt sätta utböjningen y_0 lika med utböjningen y_1 så erhålls ett samband ur vilket motsvarande normalkraft kan beräknas. Man kan söka och beräkna på så sätt uppkommen största respektive minsta normalkraft. Medelvärdet utgör en approximation av knäcklasten, liksom dess undre och övre gräns ges av minsta och största beräknade värden.

Beräkningen kan nu upprepas med den med konjugatbalkmetoden beräknade utböjningen, varvid en ny utböjningsfigur $y_2(x)$ erhålls, och nya värden för minsta och största motsvarande knäcklast kan beräknas, alltså genom användande av $y_1(x)$ och $y_2(x)$.

Vianellos metod ger (för det mesta) ett mot den exakta knäcklasten konvergerande värde. Konvergensen är i många fall snabb, vilket medfört att metoden lämpar sig för iterativ beräkning.

Exempel på beräkningsgång

0. Dela upp balken i segment med konstant böjstyhet (EI) för varje del.

1. Anta utböjning y_{0i} för balken. Största värdet ska vara = 1.

2. Ansätt normalkraft $N=1$ vid varje balkände.

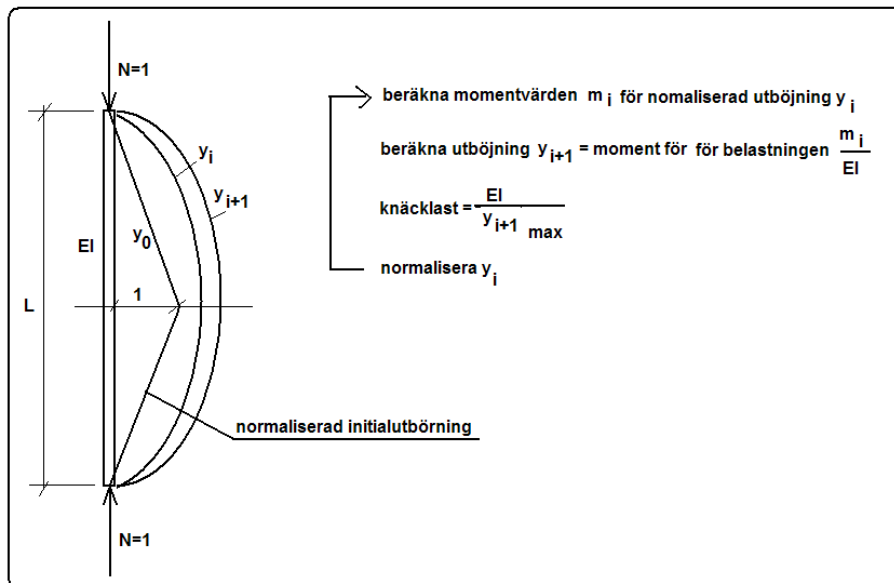
3. Beräkna momentet $M_i()$ för varje segmentmitt av den kraften. Eftersom man antar $N=1$ så blir det numeriska värdet av momentet alltså lika med utböjningen.

4. Med det beräknade momentdiagrammet dividerat med böjstyvhetsen EI som balkens belastning så beräknas nytt "momentdiagram" (momentareametoden, även kallad konjugatbalkmetoden eller "momentet av momentet"). Detta beräknade moment utgör utböjningen, $y_i(x)$.

5. Eftersom antagits $N=1$ så är knäcklasten lika med det inverterade värdet av den största utböjningen. Om man har konstant EI så blir knäcklasten = $EI / y_{\max}$.

6. Normalisera vektorn med utböjningen, $y_i(x)$, vilket innebär att man sätter största värdet till 1, d v s dividera alla värden för vektorn $y_i(x)$ med $y_{\max}$.

7. Gå till 3, upprepa tills skillnaden i beräknad knäcklast är godtagbart liten. Detta innebär alltså att skillnaden mellan utböjningsfiguren i aktuellt steg och föregående steg är godtagbart liten.



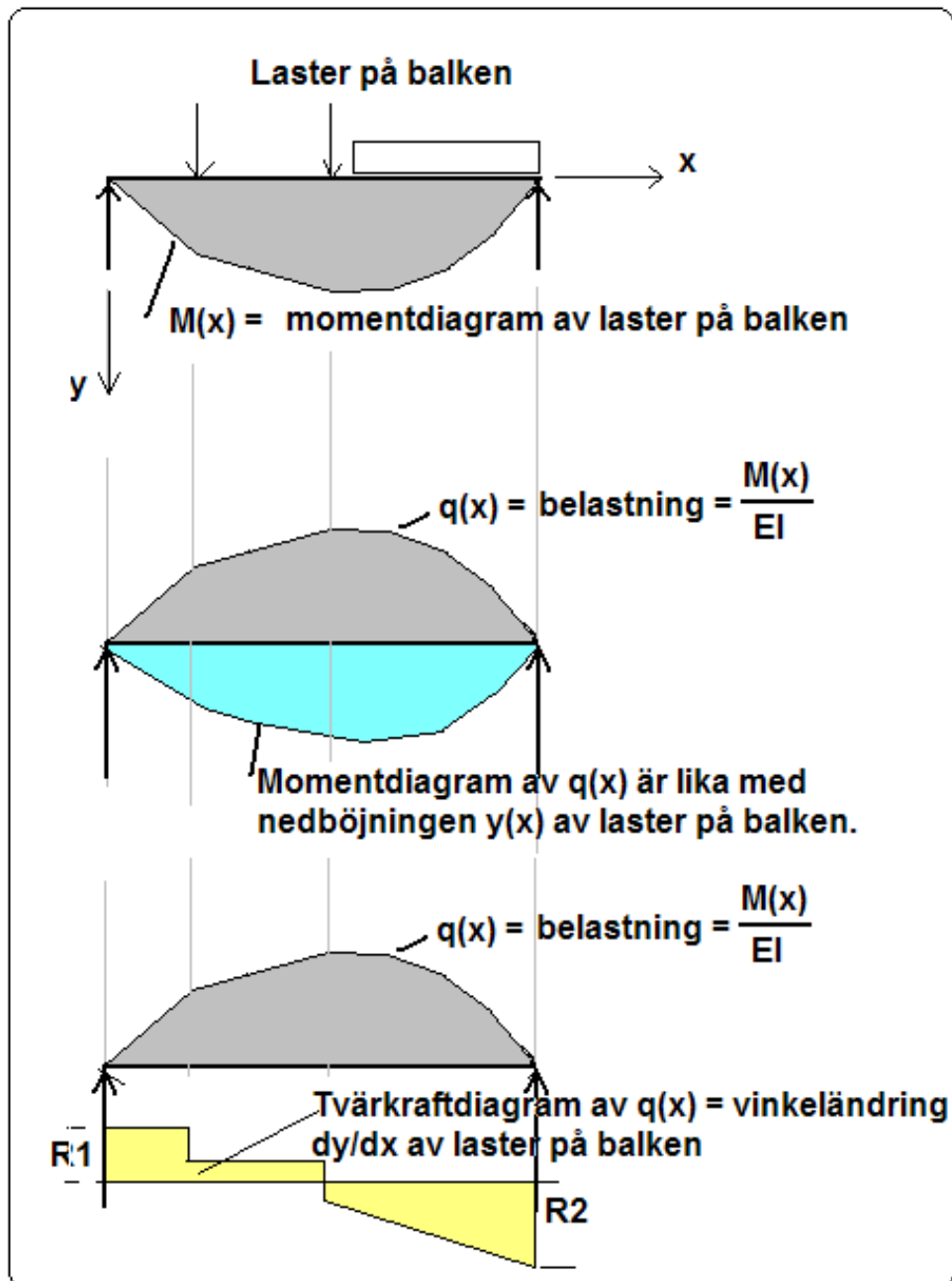
Vianellos metod för beräkning av knäcklast, exempel med konstant böjstyvhets EI

Man kan visa att utböjningsvektorn under ganska generella villkor konvergerar mot den som motsvarar knäcklasten. Metoden är analog med att finna minsta egenvärdet till en matris med inversiteration ("potensmetoden").

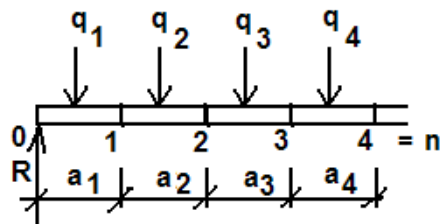
Man kan välja startvektorn till att motsvara ett enkelt linjärt samband. I litteratur finner man ofta mer komplexa initiala utböjningsfunktioner, vilket kan ha sin förklaring i en önskan att minska antalet iterationer för att snabbt nå konvergens, men för en modern dator har det normalt ingen praktisk betydelse att antalet iterationer ökar, beroende på val av startvektor. 1980 typiskt 1MIPS, idag mer än 10000 MIPS (MIPS = miljoner processorinstruktioner per sekund).

Den nämnda momentareametoden illustreras i figuren nedan. Man beräknar först momentdiagrammet för balken, under inverkan av aktuella laster. Sedan belastas balken med detta momentdiagram dividerat med böjstyvheten EI .

Detta ger ett nytt tvärkraftsdiagram och momentdiagram. Momentdiagrammet anger nu nedböjningen och tvärkraftsdiagrammet vinkeländringarna. "Stödreaktionerna" R_1 och R_2 anger vinkeländringarna vid stöden.



Momentareametoden, berÅkning av utbÅjning och vinkelÅndring fÅr ett lastsystem pÅ en bÅlk genom att berÅkna bÅlken belastad med momentdiagrammet/ EI fÅr bÅlken med yttre laster.



förutsÅtts $m_0 = m_n = 0$ (ledade ÅndstÅd)

TvÅrkraft i olika snitt $i = 1, 2, 3, \dots, n$ blir

$$T_1 = R - q_1$$

$$T_2 = R - q_1 - q_2 = T_1 - q_2$$

$$T_3 = R - q_1 - q_2 - q_3 = T_2 - q_3, \text{ osv} \dots$$

$$T_i = T_{i-1} - q_i$$

Moment i olika snitt $1, 2, 3, \dots, n-1$ blir :

$$m_1 = Ra_1 - q_1 \frac{a_1}{2}$$

$$m_2 = R(a_1 + a_2) - q_1(a_2 + \frac{a_1}{2}) - q_2 \frac{a_2}{2} = m_1 + Ra_2 - q_1 a_2 - q_2 \frac{a_2}{2}$$

$$m_3 = R(a_1 + a_2 + a_3) - q_1(a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2}) - q_2(a_2 + \frac{a_3}{2}) - q_3 \frac{a_3}{2} =$$

$$= m_2 + Ra_3 - q_1 a_3 - q_2 a_3 - q_3 \frac{a_3}{2}, \text{ osv} \dots$$

$$m_i = m_{i-1} + a_i (T_{i-1} - \frac{q_i}{2})$$

VÅrdet q_i innehÅller momentintensiteten Å strÅckan a_i dividerad med bÅjstyvheten EI_i fÅr strÅckan a_i sÅ bÅlken belastas med momentdiagrammet dividerat med resp dels bÅjstyvhet. Momentintensiteten $\bar{m}_i$ utgÅr medelvÅrdet av momentet pÅ strÅckan 'i'.

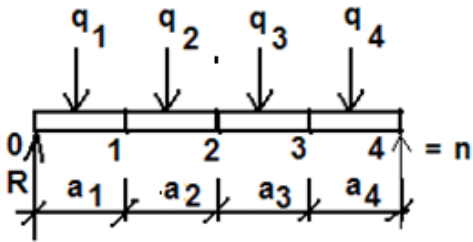
$$q_i = \frac{\bar{m}_i \cdot a_i}{EI_i}; i = 1, 2, 3, \dots, n$$

HÅrledning av uttryck fÅr rekursiv berÅkning av tvÅrkraft och moment vid bÅlk belastad med punktlaster.

I figuren ovan visas de uttryck som anvÅnds fÅr berÅkning av tvÅrkrafter och moment fÅr en bÅlk pÅ tvÅ stÅd och belastad med en uppsÅttnig punktlaster $q(i)$. BÅlken År uppdelad i segment med lÅngderna $a(i)$. FÅr varje segment antas bÅjmoment $M(i)$ och bÅjstyvhet $EI(i)$ konstant.

BerÅkningen av reaktionen R vid vÅnstra stÅdet kan berÅknas med jÅmvtsekvation kring hÅgra stÅdet, sÅsom visas i figuren nedan.

BerÅkning av R, exempel med 4 segment.



$$R(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = q_1\left(\frac{a_1}{2} + a_2 + a_3 + a_4\right) + q_2\left(\frac{a_2}{2} + a_3 + a_4\right) + q_3\left(\frac{a_3}{2} + a_4\right) + q_4\left(\frac{a_4}{2}\right)$$

Vid konstant a gÅller

$$R = \frac{7 \cdot q_1 + 5 \cdot q_2 + 3 \cdot q_3 + 1 \cdot q_4}{8}$$

BerÅkning av reaktion R vid vÅnstra stÅdet berÅknas med jÅmvtsekvation kring hÅgra stÅdet. Vid konstant vÅrde pÅ segmentlÅngden sÅ fÅrenklas uttrycket fÅr R.

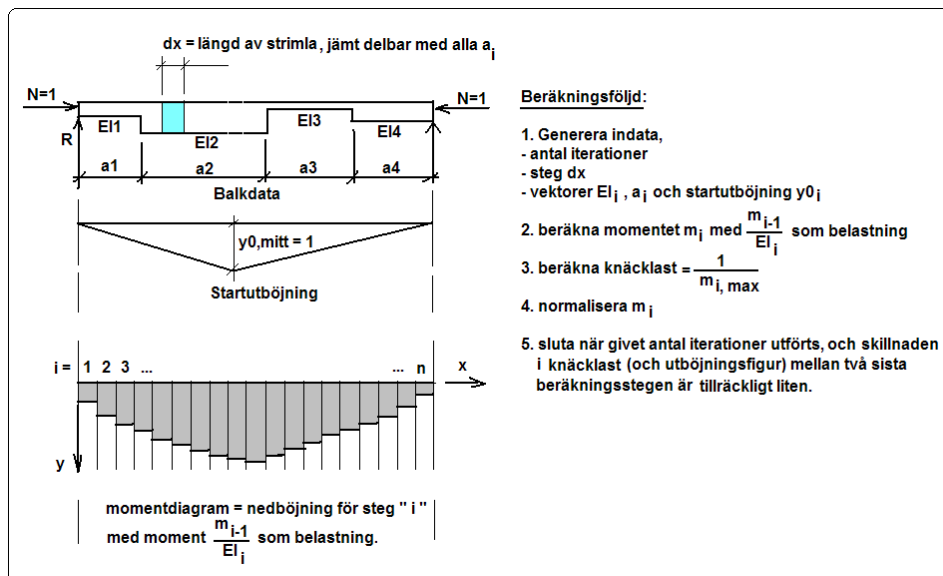
```
Dim VectorMax As Double = 0
Dim i As Integer = 1
Dim n As Integer = UBound(Vector)

' berÅkna maxvÅrdet
For i = 1 To n
    If Vector(i) > VectorMax Then
        VectorMax = Vector(i)
    End If
Next
'
Dim NormaliseradVector(n) As Double
' normalisera
For i = 1 To n
    NormaliseradVector(i) = Vector(i) / VectorMax
Next
'
Return NormaliseradVector ' normal return
```

Normalisering av vektor() med utbÅjningsvÅrden vector(i) till $vector(i) = vector(i) / vector(max)$.

Normaliseringen anvÅnds vid berÅkning med Vianellos metod.

Exempel

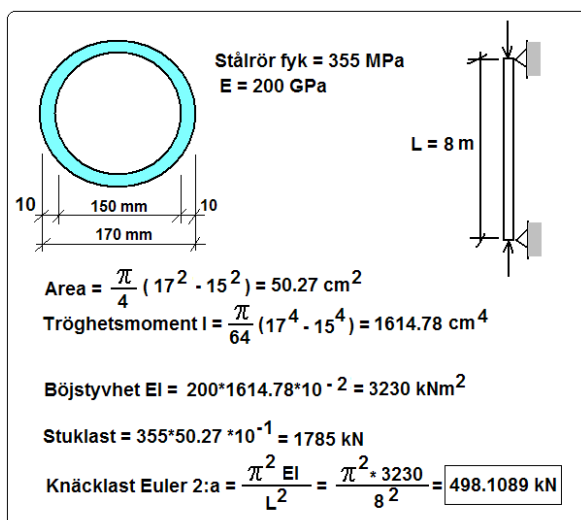


Schematisk beskrivning av beräkningsfölj (exempel visat för balk med 4 fält med olika böjstyvheter EI).

I figuren ovan visas de olika stegen i en beräkning syftande till att beräkna knäcklasten för en axiellt belastad balk (sträva). Villkoret att steglängden dx ska vara jämnt delbart med alla balkavsnitt med konstant EI är betingat av att programmering blir något enklare, men inget nödvändigt villkor för beräkningsföljden.

Exemplet visar en sträva med ledad infästning vid ändarna. Senare visas hur man kan hantera ändra infästningsförhållanden, t ex inspanning och förskjutning samt elastisk inspanning.

För att testa modellen utförs beräkningar för konstant EI . Här finns som bekant en exakt lösning (Euler 2:a), men beräkningarna nedan genomförs för att visa att modellen fungerar samt vad hur konvergensen varierar med elementuppdelning och antal iterationer.



Testexempel, stålrör utan sidomotstånd, konstant EI , ledad infästning.

Faktorer som påverkar noggrannhet och konvergenshastighet är elementindelning och antal iterationer. Med tre iterationer och varierande antal element erhålls för strävan i figuren ovan följande resultat med den visade implementeringen av Vianellos metod:

Antal element	Knäcklast, kN	avvikelse, %
8	511.198	2.63%
16	501.331	0.65%
32	498.915	0.16%
64	498.314	0.04%
128	498.164	0.01%
256	498.127	0.0036%
512	498.117	0.0016%
1024	498.114	0.0010%
4096	498.114	

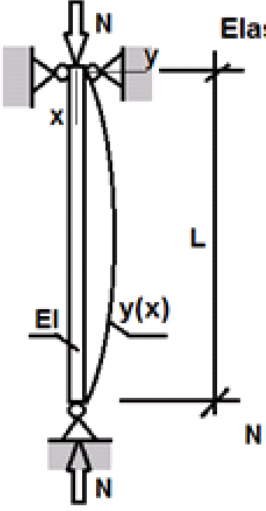
Resultat vid olika antal element för strävan i figuren, tre iterationer

Som framgår av tabellen får man ett relativt noggrant värde redan för ett fåtal element och endast tre iterationer. Med ökande antal element så ökar noggrannheten, och resultatet förefaller för den använda datorn konvergera mot ett värde som ligger ca 0.001 % över det teoretiskt korrekta värdet.

Bilaga 6

Bandmatrismetoden

Istället för Vianellos metod kan man diskretisera differentialekvationen som beskriver den normalkraftbelastade strÅvan, varvid man erhÅller ett ekvationssystem med n ekvationer, om strÅvan delas upp i n delar, se bilderna nedan. Man berÅknar sedan det minsta egenvÅrdet till koefficientmatrisen och erhÅller pÅ sÅ sÅtt strÅvans knÅcklast.

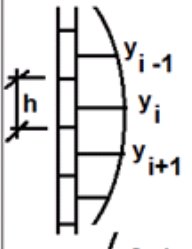


Elast linjens ekv: $\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M(x)}{EI(x)}$ eller $y'' = - \frac{Ny}{EI(x)}$

$y'' + k^2 y = 0$ med $k^2 = \frac{N}{EI}$

Lösning: $y = A \sin kx + B \cos kx$
 $y' = Ak \cos kx - Bk \sin kx$
 $y'' = -Ak^2 \sin kx - Bk^2 \cos kx$
 randvillkor $y(0)=0$ ger $B = 0$
 randvillkor $y(L)=0$ ger $0 = A \sin kL$
 $A \neq 0$ ger $\sin kL = 0$
 alltså $kL = 0, kL = \pi, kL = 2\pi, \dots$
 sÅkt lösning $kL = \pi$ ger $k = \frac{\pi}{L}$
 $k^2 = \frac{N}{EI} = \frac{\pi^2}{L^2}$
 $N = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ ("Eulers 2:a knÅckfall")

Analytisk berÅkning av knÅcklast



dela upp strÅvan i n lika delar.
 dellÅngd $h = \frac{L}{n}$. Antag konstant EI .

differensversion av diff-ekv:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + k^2 y_i = 0$$

matrisform:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + k^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

eller

$Ay = \lambda y$; ett egenvÅrdesproblem

Uppdelning av strÅvan i segment resulterar i ett egenvÅrdesproblem fÅr att berÅkna knÅcklasten. Den resulterande koefficientmatrisen År en bandmatris (bandbredd =3), varav metodens namn.

För matrisen $\begin{pmatrix} a & c & & \\ b & a & c & \\ & b & a & c \\ & & \dots & \\ & & & a & c \end{pmatrix}_{n \times n}$

är egenvärdena $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$\lambda_m = a + 2\sqrt{bc} \cos \frac{m\pi}{n+1}$$

; $m = 1, 2, \dots, n$

här $\begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & \dots & \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$m=1 \text{ ger } |\lambda|_{\min} = |-2 + 2\cos \frac{\pi}{n+1}|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1 = \frac{\pi^2}{n^2}$$

Vid konstant EI så kan till beloppet minsta egenvärde beräknas exakt.

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + h^2 k^2 y_i = 0$$

$$Ax + \lambda x = 0$$

$$\lambda_{\min} = h^2 k^2$$

$$h^2 = \left(\frac{L}{n}\right)^2 \text{ och } k^2 = \frac{N}{EI} \text{ ger}$$

$$\text{med insatt } \lambda_{\min} = \frac{\pi^2}{n^2} \text{ alltså}$$

$$\frac{\pi^2}{n^2} = \frac{L^2}{n^2} \frac{N}{EI}$$

$$\text{som ger } N = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Med ökande antal segment närmar sig den beräknade knäcklasten det exakta värdet (Euler 2), vilket är det värde för N som visas i bilden ovan.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

För mycket stora värden på n , d v s $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$ gäller

$$\lambda_{\max} = -2 + 2\cos \frac{n\pi}{n+1} = |-2 - 2| = 4$$

Till beloppet minsta värde för λ ($=0$) uppnås för

$$\cos \frac{m\pi}{n+1} = 1, \text{ d v s } \frac{m\pi}{n+1} = 0,$$

som uppnås för $m=1$ och $n=\infty$

För en A-matris med ett enda element finns bara ett egenvärde, vars belopp är

$$\lambda = -2 + 2\cos \frac{\pi}{1+1} = |-2+0| = 2$$

Beloppet för egenvärden till matris **A** varierar mellan 0 (noll) och 4.

Som framgår av bilden ovan så varierar det möjliga till beloppet största värden för egenvärdet från 2 för ett enda element i matrisen A till beloppet 4 för mycket stort antal element (= stråvan uppdelad i många delar).

i	λ_i	diff $\lambda_{i+1} - \lambda_i$
1	- 0.0810	0.2365
2	- 0.3175	0.3628
3	- 0.6903	0.4789
4	- 1.1692	0.5462
5	- 1.7154	0.5692
6	- 2.2846	0.5462
7	- 2.8308	0.4790
8	- 3.3098	0.3727
9	- 3.6825	0.2365
10	- 3.9190	-

Egenvärden för matrisen **A** då den har 10 element (stråvan indelad i 10 delar)

I bilden ovan visas beräknade egenvärden för en indelning i 10 delar. Beloppet för egenvärdena ökar monotont med ökande elementnummer. Notera att differensen mellan egenvärdena har ett maxvärde för stråvans mittpunkt, samt att differensen för egenvärdena är symmetrisk med avseende på stråvans mittpunkt. Denna iakttagelse kan användas för att underlätta uppsökandet av minsta egenvärdet.

Varierande EI, bandmatrismetod

När EI varierar för olika delar av stråvan så ändras matrisen A. Varje rad innehållande respektive segments differensapproximation ska multipliceras med motsvarande böjstyvhet EI, se bilden nedan.

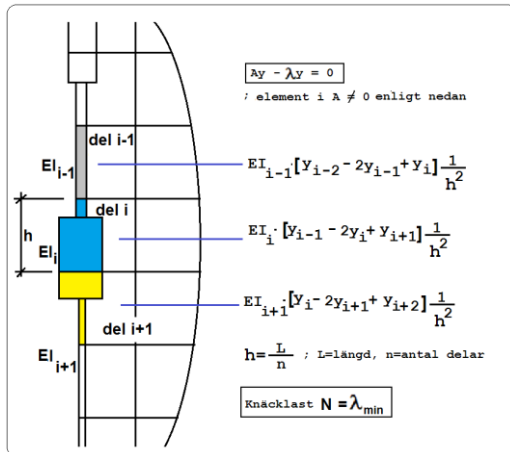


Bild visande bandmatris vid varierande EI

Bandmatrisen är kvadratisk (nxn). Det finns därför n stycken egenvärden. För varje segment j finns alltså ett egenvärde λ_j , se bilden ovan. Knäcklasten ges av det minsta egenvärdet, enligt uttrycket

$$N = \lambda_{\min}$$

Det är förstås onödigt att multiplicera alla element med den konstanta faktorn $1/h^2$, där h = segmentlängden $= L/n$, L = stråvans längd och n = antalet segment. Om denna onödighet ej sker så beräknas istället knäcklasten enligt uttrycket

$$N = \lambda_{\min}/h^2$$

där $\lambda_{\min}$ då alltså istället är minsta egenvärdet till A utan att varje element multiplicerats med faktorn $1/h^2$.

Vid sträva med konstant E, vilket i allmänhet gäller, så kan man låta bli att multiplicera alla element med E, vilket följaktligen leder till att knäcklasten beräknas med uttrycket

$$N = E \lambda_{\min}/h^2$$

där $\lambda_{\min}$ då alltså istället är minsta egenvärdet till A utan att varje element multiplicerats med faktorn E/h^2 .

Tecknet för knäcklasten N enligt ovan blir negativt, vilket inte tagits med i uttrycken ovan.

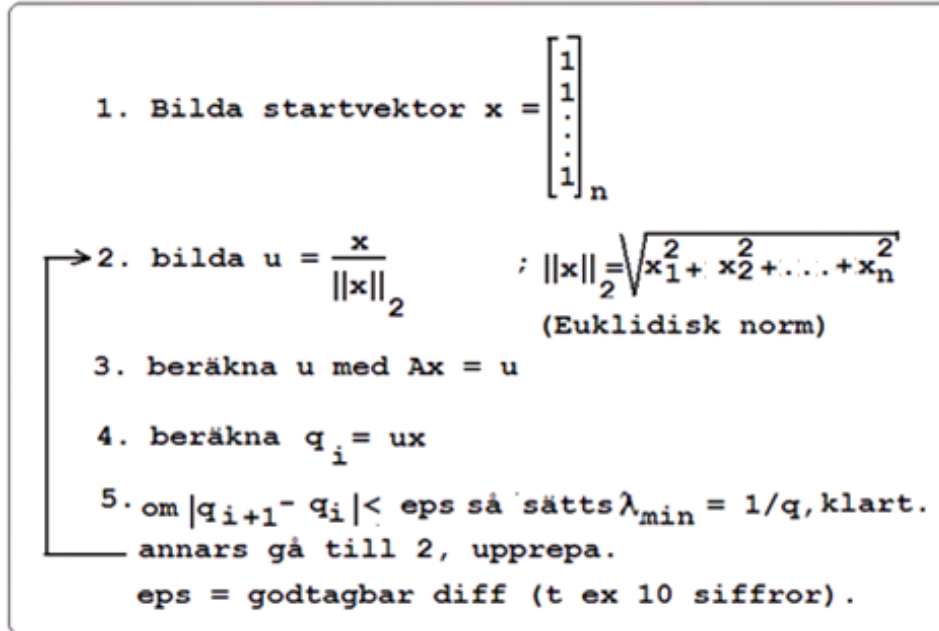
Notera vidare att randvillkoren (utböjningarna i ändpunkterna) är noll, dvs $y(0) = 0$ och $y(L) = 0$. Om man önskar efterlikna annat villkor, (t ex fast inspänning, $y'(0) = 0$), så kan värdet på böjstyvheten EI vid respektive ände ges ett motsvarande värde (vid fast inspänning ett mycket stort värde), men numeriska problem kan då uppkomma vid uträkningarna.

Beräkning av det minsta egenvärdet för A

Till skillnad från vad som är fallet med konstant EI, där minsta egenvärdet (och alla andra egenvärden) kan beräknas exakt, så måste minsta egenvärdet (och övriga egenvärden) vid varierande böjstyvhet beräknas med numerisk metod. Matrisen **A** är då inte symmetrisk. Som framgår ovan är

den inte heller givet positivt definit (element $a_{11} < 0$). Dessa tvÅ egenskaper utesluter vissa vanliga metoder.

För att beräkna enbart minsta egenvärdet så kan man använda inversa potensmetoden, se bilden nedan. Konvergensen är ofta mycket snabb.



Inversa potensmetoden för beräkning av minsta egenvärde till A

I bilden nedan visas ett exempel på beräkning av knäcklasten för en stråva med varierande böjstyvhets EI (Timoshenko & Gere, 1989). Konvergensen mot det korrekta värdet 157 kN är relativt långsam för ökat antal element, såsom framgår av bilden. Med Vianellos metod uppnås mycket snabbare konvergens. Notera att Vianello ger övre grÄns för knäcklasten, medan för bandmatrismetoden det motsatta gÄller.

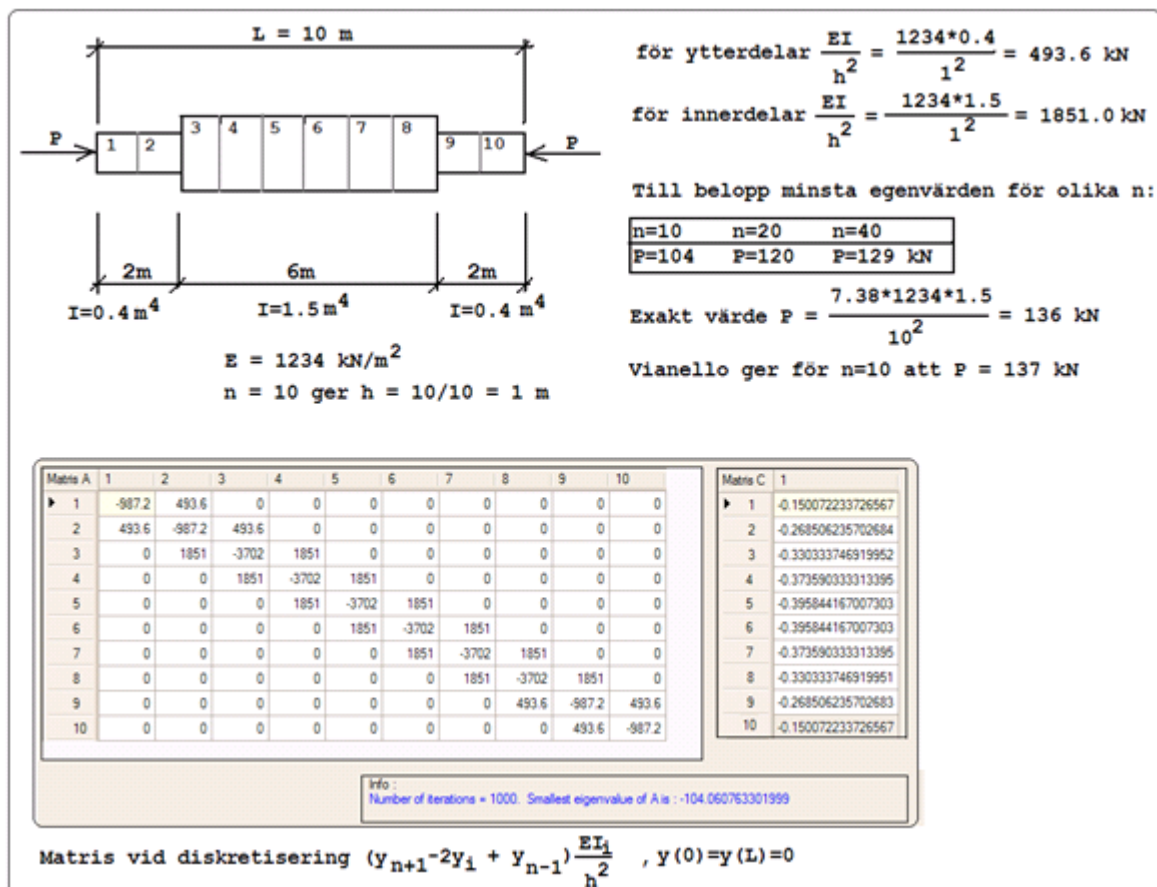
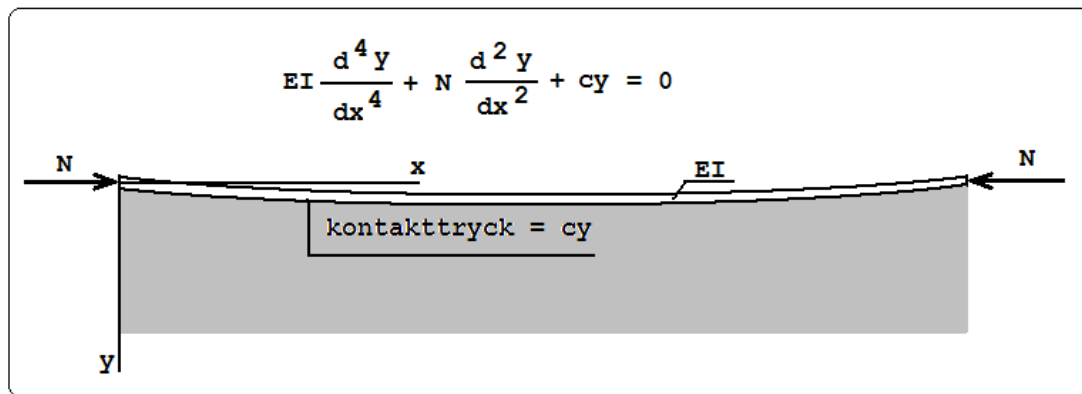


Bild visande matris A samt beräkning av minsta egenvärde (och tillhörande egenvektor). Till beloppet minsta egenvärde är ca 104 kN för 10 delar, beräknat med inversa potensmetoden (se bilden ovan).

Beträffande bandmatrismetoden tillämpad direkt (på matris motsvarande systemet av diskretiserade segment) kan framhållas att en sådan metod knappast torde tillämpas i det fall en algoritm för beräkning av knäcklast för stråvor med varierande EI ska formuleras. Istället lagras som mest endast diagonalerna, och beräkning av minsta egenvärde sker med beaktande av matrisens bandstruktur.

Bilaga 7Differensmetod fÅr axiellt belastad balk med elastisk omgivning

Bandmatrismetoden och berÅkning av egenvÅrden fÅr resulterande matriser som approximerar en differentialekvation kan Åven tillÅmpas pÅ balkar med elastisk omgivning. FÅr en sÅdan balk med axiell belastning N gÅller fÅljande (se t ex Heteny, ref 12, sid 196), med beteckningar enligt bilden.



Balk pÅ linjÅrelastisk omgivning (som antas verksam oberoende av utbÅjningsriktning, uppÅt respektive nedÅt). Notera att " c " hÅr betecknar strÅvans bÅddmodul.

Faktor c , strÅvans bÅddmodul

Faktorn " c " i uttrycket ovan fÅrtjÅnar en kommentar. Man utgÅr frÅn en materialkonstant, ofta benÅmnd k_0 , fÅr den fjÅdrande omgivningen i kontakt med strÅvan. Konstanten k_0 har dimensionen F/L^3 (F = kraft, L = lÅngd), vilket som sig bÅr leder till att konstanten multiplicerad med en rÅrelse leder till en spÅnning, som ju har dimensionen F/L^2 .

Materialkonstanten k_0 brukar kallas markens bÅddmodul. Konstanten anger sjunkningen fÅr en stor belastad yta fÅr en jÅmnt utbredd last Åver hela ytan.

Anta att strÅvan har en sidlÅngd lika med vÅrdet " b ". FÅr att erhÅlla ett c -vÅrde som motsvarar stÅvan ifrÅga sÅ mÅste fÅljaktligen vÅrdet " c " i uttrycket i figuren multipliceras med vÅrdet " b " vid berÅkning. Detta innebÅr att vÅrdet c i figuren berÅknas som $c = k_0 b$, varfÅr " c " i figuren har dimensionen F/L^2 , exempelvis kPa. Detta År bakgrunden till att i berÅkningar brukar anges " kb ", exempelvis berÅkning av elastisk lÅngd = $(4EI/kb)^{0.25}$. VÅrdet " c " i bilden ovan kan dÅrfÅr sÅgas utgÅra strÅvans bÅddmodul, inte markens modul.

Om nu kompressionen av det elastiska mediet fÅr alla strÅvor endast antas ske intill ett avstÅnd lika med " b " rÅknat frÅn strÅvans yta sÅ utgÅr " b " vid berÅkning av " c ", och man erhÅller fÅr balkens bÅddmodul " c " vÅrdet $c = k_0$, alltsÅ samma numeriska vÅrde som materialkonstanten $c = k_0$, men nu med dimensionen F/L^2 .

FÅr exempelvis lera brukar man vid lÅng tids belastning rÅkna med $k_0 = 50c_u$. Vid berÅkning av pÅlars knÅcklast i lera ser man ibland knÅcklast = $2(cEI)^{0.5}$, och $c = b \cdot 50c_u$, vilket alltsÅ År fel. FÅr att undvika misstag sÅ mÅste man skilja pÅ balkens respektive jordens bÅddmodul. Med antagandet om kompressionsdjupet = b fÅr de dock samma numeriska vÅrde.

DÅr en balk (eller strÅva) delas upp i delar med lÅngden = h sÅ att den elastiska omgivningen ersÅtts med fjÅderstÅd sÅ med fjÅderkonstanten = c*h.

Bandmatrismetod

Åven hÅr kan en diskretisering av i uttrycket ovan visade derivator gÅras, se bilden nedan. Notera att uttrycken fÅrutsÅtter en konstant bÅjstyvhet EI och konstant fjÅderbÅddstyvhet c.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{EI}{h^4} \overbrace{(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2})}^A$$

$$N \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{N}{h^2} \overbrace{(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})}^B$$

Approximering av differentialekvation fÅr balk pÅ elastiskt underlag. EI och c År konstanta.

$$\frac{EI}{h^4} Az + \frac{N}{h^2} Bz + cz = 0 ; z = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

mult med h^2 ;

$$\frac{EI}{h^2} Az + NBz + h^2 cz = 0$$

mult med B^{-1} frÅn vÅnster;

$$\frac{EI}{h^2} B^{-1} Az + Nz + B^{-1} h^2 c I z = 0$$

; I = enhetsmatris, n, n

$$\left(\frac{EI}{h^2} B^{-1} A + B^{-1} h^2 c I \right) z + Nz = 0$$

$$B^{-1} \left(\frac{EI}{h^2} A + h^2 c I \right) z + Nz = 0$$

som motsvarar standardformen $(M - \lambda)z = 0$;
dÅr λ År egenvÅrden till M.

BerÅkna alltsÅ minsta egenvÅrdet till M,
dvs minsta egenvÅrde till matrisen

$$M = B^{-1} \left(\frac{EI}{h^2} A + h^2 c I \right)$$

Formulering av egenvÅrdesproblemet vid konstant EI och c

Vid konstant EI och c fÅrenklas fÅrstÅs berÅkningarna. Tillskillnad frÅn bandmatriserna A och B ovan sÅ År inversmatrisen en fylld matris. FÅr berÅkning av egenvÅrden dÅr ett litet steg h anvÅnds (mÅnga segment) sÅ År det dÅrfÅr vara ÅnskvÅrt eller nÅdvÅndigt att tillÅmpa matristransformationer sÅ att bandstrukturerna (och egenvÅrdena) sÅ lÅngt det År mÅjligt bibehÅlls och berÅkning samt lagring av

matriselement undviks. Notera Åven att $\mathbf{M}$ inte År symmetrisk, vilket stÅller motsvarande krav pÅ berÅkningsmetod fÅr att ta fram egenvÅrden.

EgenvÅrden

BerÅkning av egenvÅrden innebÅr lÅsning av

$$\mathbf{A}\mathbf{z} - \lambda \mathbf{z} = 0 \quad \dots (1)$$

I vÅrt fall har vi dock tvÅ matriser, $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$;

$$\mathbf{A}\mathbf{z} - \lambda \mathbf{B}\mathbf{z} = 0 \quad \dots (2)$$

dÅr $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ År kvadratiske matriser, $\mathbf{z}$ en kolumnvektor ("egenvektor") och λ en skalÅr, som utgÅr ett "egenvÅrde".

FÅr matriser $n \times n$ finns n stycken egenvÅrden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Vi sÅker alltsÅ det minsta.

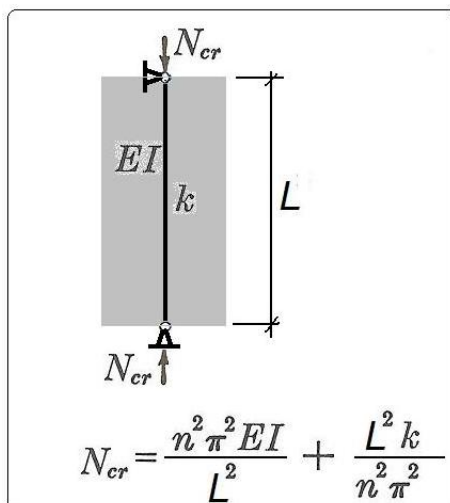
En generell lÅsning till sambandet (2) ovan År

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{z} - \lambda \mathbf{I} \mathbf{z} = 0 \quad ; \quad (\mathbf{I} = \text{enhetsmatrisen}, \mathbf{B}^{-1} \text{ År invers matris till } \mathbf{B})$$

vilket alltsÅ ÅterfÅr problemet till grundformen ekv (1) ovan, om man berÅknar egenvÅrdena fÅr matrisprodukten $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$ istÅllet fÅr $\mathbf{A}$. TyvÅrr År i allmÅnhet $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$ inte symmetrisk, Åven om $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ År symmetriska, vilket komplicerar berÅkningsarbetet. Om mÅjligt sÅker man metoder dÅr symmetri bevaras.

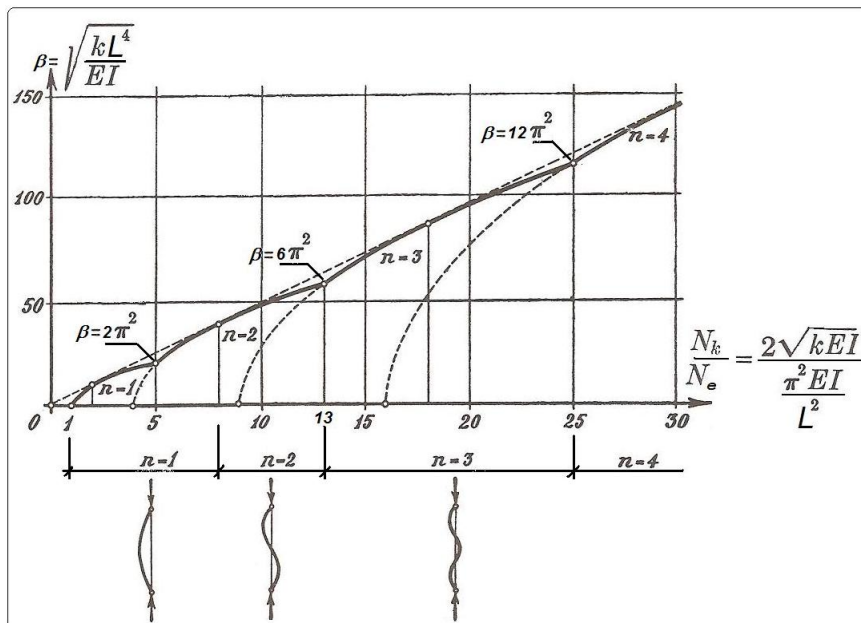
NÅr pÅlen har konstant EI och c

FÅr det fall c och EI har konstant vÅrde kan uttrycket fÅr knÅcklasten berÅknas analytiskt, se t ex Heteny, Beams on Elastic Foundation, 1949.



KnÅcklast N_{cr} fÅr en rak pÅle i elastiskt medium, konstant bÅjstyvhet EI och elastiskt omgivning c , lÅngd $=L$ och ledad, styrd infÅstning upptill och nedtill. VÅrdet k i bilden motsvarar Ej ord varmed avses den elastiska omgivningens E -modul, t ex $50cu$.

För en pelare utan sidostöd minskar knÅcklasten i proportion till kvadraten pÅ lÅngden. För en pelare (pÅle) i elastiskt medium År dÅremot knÅcklasten istÅllet i ganska liten utstrÅckning beroende av lÅngden, som framgÅr av bilden nedan. KnÅckfiguren blir ett antal sinusvÅgor. KnÅcklasten dÅ pÅlens lÅngd Åkar nÅrmar sig snabbt vÅrdet $N_{Cr}=2(cEI)^{1/2}$, vilket dÅrför År det vÅrde som ofta brukar antas gÅlla fÅr pÅlar omgivna av jord, oavsett deras lÅngd.



KnÅckfigur och motsvarande knÅcklast N_{cr} fÅr en rak pÅle i elastiskt medium, konstant bÅjstyvhets EI och elastiskt stÅd c , lÅngd $=L$ och ledad, styrd infÅstning upptill och nedtill. VÅrde k i bilden motsvarar E_{jord} (efter Heteny, *Beams on Elastic Foundation*, 1949). VÅrde n anger antalet halva sinusvÅgor. Som framgÅr av bilden utgÅr uttrycket $N_{Cr}=2(cEI)^{1/2}$ en god approximation av knÅcklasten oberoende av pÅlens lÅngd.

Exempel med konstant EI och c

$L = 6$ ger och antal delar $= 6$ ger $h=1$
 $h=c=EI=1$ ger
 $M=B^{-1}(A \cdot I)$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Minsta egenvÅrde fÅr $(M \cdot \lambda I)x=0$ År dÅ $\lambda_1 = 2.391$
 Exakt vÅrde ($n=1$):
 $N_{Cr} = \pi^2 n^2 EI / L^2 + L^2 c / (n^2 \pi^2) = 1.096 + 0.912 = 2.008$
 $N_{Cr} = 2\sqrt{1 \cdot 1} = 2$ fÅr $L = \infty$

Bandmatrismetoden, exempel.

Om för exemplet i bilden antas $L=6$ meter och $EI = 1$ kN, $c = 1$ kN/m² så erhålls för en obegränsat lång påle det analytiskt ber knade v rdet $N_{cr} = 2$ kN. Med uppdelningen i 6 delar, $h = 1$ meter så ger ber kning med bandmatriser 2.39 kN, som visas i bilden ovan och nedan

1	-5.87938524157182
2	-4.11250305573548
3	-3.65270364466616
4	-3.21083623408138
5	-2.46791111376232
6	-2.39094642446853

Samtliga egenv rden f r exemplet ovan med $EI=c=1$ och steget 1.

V rdet beta i den tidigare bilden ovan blir lika med 36, vilket motsvarar $n = 2$. Det exakta v rdet f r kn cklasten blir då

$$N_{cr} = n^2 \pi^2 EI/L^2 + L^2 c / (n^2 \pi^2) = 1.096 + 0.912 = 2.008 \text{ kN}$$

Genom att öka antalet delar f r bandmatrisl sningen så n rmar sig det minsta egenv rdet detta värde. Observera att v rdet för c då måste justeras till att motsvara l ngden för varje del (h).

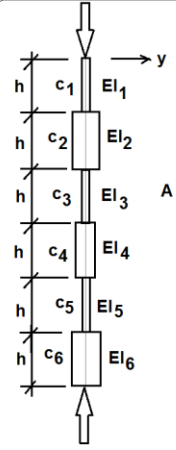
Str va med varierande EI och varierande c

F r det fall som h r är mest av intresse, n mligen en str va med varierande b jstyvhet EI och omgivningstyvhet c , så modifieras differensapproximationen (diskretiseringen) av differentialekvationen gällande konstant EI och c . Detta illustreras med ett exempel nedan, där en str va med varierande EI och c delats upp i 6 delar.

Den matris **M**, för vilken minsta egenv rdet och tillhörande egenvektor (utb jning) ska bestämmas modifieras med kolumnvektorer **{S}** och **{K}**, vilka innehåller varje dels b jstyvhet och fj derkonstant, respektive, se bilden.

Notera att l ngden av varje element antas konstant = h och att varje element antas ha olika styvheter. Minskas elementindelningen så kommer n mnda vektorer att innehålla samma värde för det antal segment som faller inom ett och samma element.

Vid automatisk, stegvis minskning av elementlängden så kommer vissa segment d rf r i allm nhet att omfatta element med olika styvheter vid elementgr nserna. Allteftersom antalet element ökas för en given l ngd för str van så minskar dock inverkan av denna "dubbeltydighet".



$$A = \begin{bmatrix} 6EI_1 & -4EI_2 & 1EI_3 & 0 & 0 & 0 \\ -4EI_1 & 6EI_2 & -4EI_3 & 1EI_4 & 0 & 0 \\ 1EI_1 & -4EI_2 & 6EI_3 & -4EI_4 & 1EI_5 & 0 \\ 0 & 1EI_2 & -4EI_3 & 6EI_4 & -4EI_5 & 1EI_6 \\ 0 & 0 & 1EI_3 & -4EI_4 & 6EI_5 & -4EI_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1EI_4 & -4EI_5 & 6EI_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EI_1 \\ EI_2 \\ EI_3 \\ EI_4 \\ EI_5 \\ EI_6 \end{bmatrix} = A^0 \{s\}$$

alltså $a_{ij} = a_{ij}^0 s_j$
där $i = j = 1, 2, \dots, n$

ersätts med $1\{K\}$ där $\{K\} = h \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix}$ alltså $k_i = hc_i$

Sammantaget får man $M = B^{-1} \left(\frac{1}{h^2} A^0 s + h^2 K I \right)$ där $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Matris **M** för vilken minsta egenvärdet ska bestämmas, vid varierande EI och c

Notera också att matrisen **M** inte är symmetrisk. Detta medför att många ofta använda metoder för egenvärdesberäkning inte kan användas. En metod som i de flesta fall fungerar bra för osymmetriska matriser beskrivs nedan.

Beräkning av egenvärden för en gles, osymmetrisk matris

Flera metoder existerar för beräkning av egenvärden för matriser. För glesa, osymmetriska matriser kan man använda LR-transformering. Genom iteration uppnår man en triangulär matris (elementen är noll, eller nära noll under diagonalen). Egenvärdena återfinns i stigande ordning som den transformerade matrisens diagonalelement.

LR- transformation, lämpligt för glesa band matriser
iterativ metod. Bygger på upprepad LU-faktorisering.

För varje steg k av transformationen gäller för att

$$A_k = LU = LR \quad (\text{ekv 1})$$

Steg k slutförs genom att utföra matrismultiplikationen

$$A_{k+1} = LU = LR \quad (\text{ekv 2})$$

Ekv (1) innebär att

$$U = L^{-1} A_k$$

vilket vid multiplikation av ekv (2) ger

$$A_{k+1} = L^{-1} A_k L$$

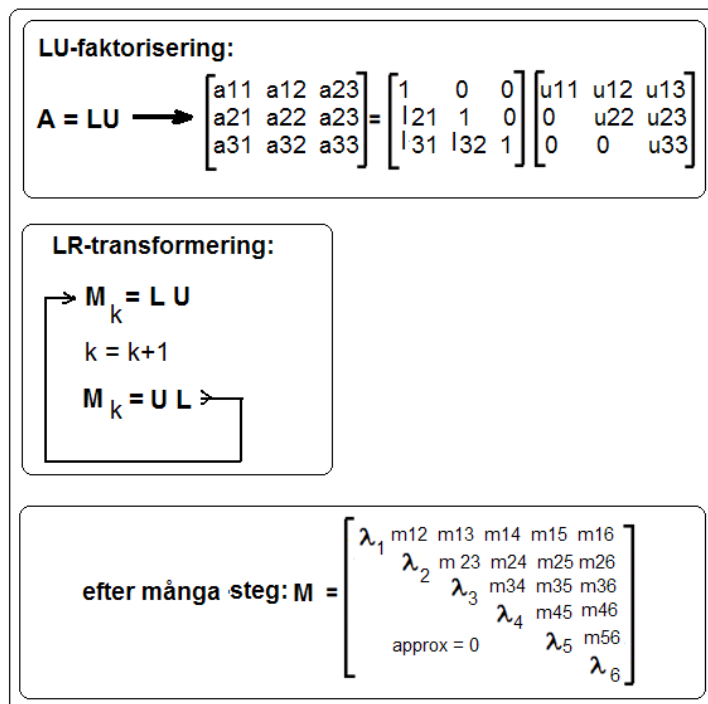
som visar att **L** utgör en ortogonal transformationsmatris.

Allteftersom iterationen fortsätts så omformas **A** mot en tridiagonal matris med nollor under diagonalen. Detta innebär att egenvärdena återfinns i den transformerade matrisens diagonalelement.

Beloppsmässigt i fallande ordning med början i för element a_{11} , om alla egenvärden har samma tecken.

LR-transformering för beräkning av egenvärden

Utförande av LU-faktoriseringen, som Återkommande anvÅnds vid transformeringen, beskrivs i bilden nedan.



LU-faktorisering

BerÅkning av egenvektorer (= strÅvans utbÅjning)

Sedan ett egenvÅrde berÅknats sÅ kan man berÅkna motsvarande egenvektorer (z) med anvÅndande av sambandet

$$Qz = 0$$

dÅr $Q = M - N_{\min} \cdot I$; $N_{\min}$ = minsta egenvÅrdet till M . I betecknar enhetsmatris

Kolumnvektorn z innehÅller alltsÅ utbÅjningarna fÅr respektive del, d v s y₁, y₂, ... y_n.

AnvÅndning av visad metod

Vi implementering av visad metod fÅr berÅkning av knÅcklast fÅr pÅle med varierande EI och Ejord sÅ År det fÅrstÅs ett ÅnskemÅl att erforderligt programmeringsarbete inte blir alltfÅr omfattande. SÅrskilda egenskaper hos matriser som ingÅr i berÅkningarna innebÅr att lagringsutrymme kan begrÅnsas och CPU-tid minskas, jÅmfÅrt med vad som blir fallet om man inte utnyttjar nÅmnda egenskaper.

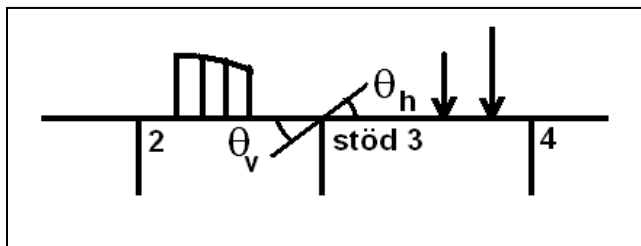
Ett exempel pÅ sÅdan optimering visas fÅr berÅkningar som beskrivs i bilaga 8.

Bilaga 8

Beräkning av stödmoment för balk på elastiska stöd med 5-momentekvationen.

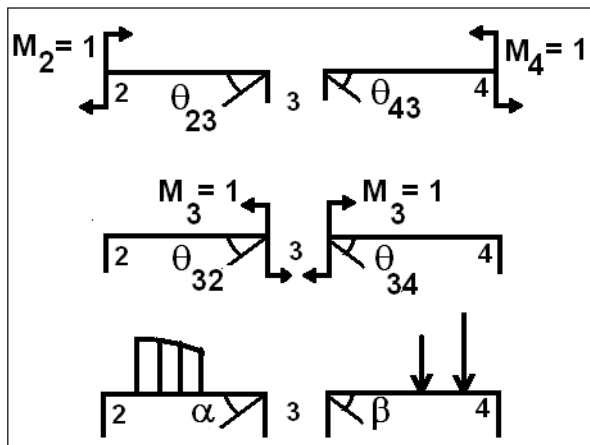
I figur 1 visas ett avsnitt av en kontinuerlig balk. Belastningar på balken orsakar vinkeländringar vid stöden. Stöd 3 betraktas. Att balken är kontinuerlig medför att stödvinkeländringen Θ_V till vänster om stödet är lika stor som stödvinkeländringen Θ_H till höger om stödet. Med beteckningarna i figuren innebär det att

$$\Theta_V - \Theta_H = 0 \quad \dots (1)$$



Figur 1. Stödvinkeländringar Θ_V och Θ_H vid ett stöd för en kontinuerlig balk.

Delbalkarna 2-3 och 3-4 skärs ut och den kontinuerliga balkens vinkeländringar för stöden behålls för de utskurna balkarna genom införande av stödmomenten M_2 , M_3 och M_4 , se figur 2. Vinkeländringarna vid stöd 3 av yttre laster på delbalkarna betecknas α och β .



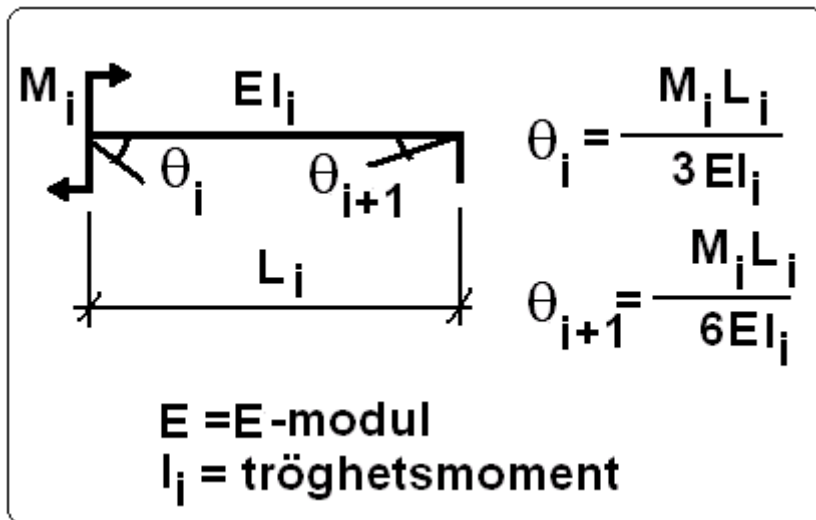
Figur 2. Vinkeländringar och ändmoment för delbalkar

De i figur 2 visade stödvinkeländringarna antas framkallade av respektive moment = 1.

Om det antas att vinkeländringarna är proportionella mot momenten så ger insättning av detta antagande i ekvation (1), **kontinuitetsvillkoret**, att

$$M_2 \Theta_{23} + M_3 (\Theta_{32} + \Theta_{34}) + M_4 \Theta_{43} + \alpha + \beta = 0 \quad \dots (2)$$

För en delbalk "i" med konstant bÅjstyvhet EI_i erhÅlls samband mellan stÅdvinkelÅndringar och ett Åndmoment enligt figur 3:



Figur 3. StÅdvinkelÅndringar fÅr Åndmoment vid balk med konstant bÅjstyvhet EI

Efter insÅttning i ekv (2) erhÅlls efter fÅrenkling fÅr stÅd 3:

$$M_2 * L_2 / (EI_2) + 2M_3 * (L_2 / (EI_2) + L_3 / (EI_3)) + M_4 * L_3 / (EI_3) + 6 * (\alpha + \beta) = 0 \quad \dots (3)$$

Ekvation (3), som kallas Clapyrons ekvation efter upphovsmannen, publicerades 1855.

NÅr E-modulen År konstant fÅr hela den kontinuerliga balken kan ekv (3) skrivas

$$M_2 * L_2 / I_2 + 2M_3 * (L_2 / I_2 + L_3 / I_3) + M_4 * L_3 / I_3 + 6E * (\alpha + \beta) = 0 \quad \dots (4)$$

NÅr bÅde E och I År konstant fÅr hela balken, d v s konstant bÅjstyvhet EI , kan ekv (3) skrivas

$$M_2 * L_2 + 2M_3 * (L_2 + L_3) + M_4 * L_3 + 6EI * (\alpha + \beta) = 0 \quad \dots (5)$$

År bÅde bÅjstyvhet EI och spÅnnvidd L konstant fÅr hela balken erhÅlls

$$M_2 + 4M_3 + M_4 + (6EI/L) * (\alpha + \beta) = 0 \quad \dots (6)$$

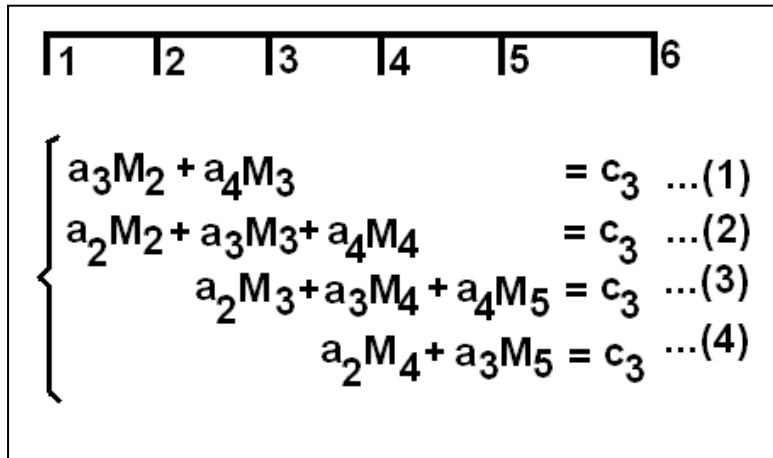
Ekv (3) kan mer generellt skrivas

$$a_2 M_2 + a_3 M_3 + a_4 M_4 = c_3 \quad \dots (7)$$

dÅr

a_2, a_3, a_4 År konstanter som beror av balkens egenskaper och geometri och c_3 År en konstant som Åven beror av belastningen pÅ balken

Om den kontinuerliga balken antas ha n st d och ändstöden antas ledade (och obelastade av momentlast) så får man $n-2$ ekvationer att l sa i system för att ber kna de $n-2$ obekanta st dmomenten. F r exempelvis en balk på 6 stöd visas resulterande ekvationssystem i fig 4.

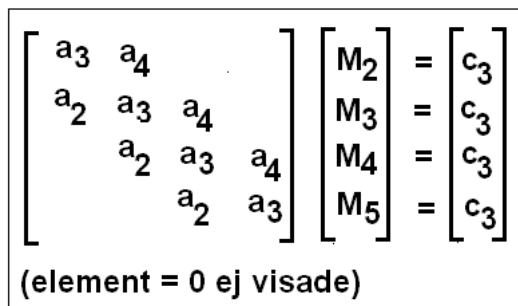


$$\begin{cases} a_3M_2 + a_4M_3 = c_3 \dots(1) \\ a_2M_2 + a_3M_3 + a_4M_4 = c_3 \dots(2) \\ a_2M_3 + a_3M_4 + a_4M_5 = c_3 \dots(3) \\ a_2M_4 + a_3M_5 = c_3 \dots(4) \end{cases}$$

Figur 4. Exempel, kontinuerlig balk på 6 stöd.

Figuren är kanske något missvisande såtillvida att konstanterna a_2 , a_3 , a_4 och c_3 f rst s i allm nhet har olika v rden på olika rader. För att generera konstanterna på en viss rad kan man föreställa sig att "mittstödet" st d 3 successivt förflyttas åt höger på balken, med början  ver st d 2.

Ekvationssystemet i figur 4 kan uttryckas i matrisform, se figur 5.



$$\begin{bmatrix} a_3 & a_4 & & & \\ & a_2 & a_3 & a_4 & \\ & & a_2 & a_3 & a_4 \\ & & & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 \\ c_3 \\ c_3 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

(element = 0 ej visade)

Figur 5. Ekvationssystem i matrisform

Ekvationssystemet i figur 5 kan uttryckas som

$$\mathbf{AM} = \mathbf{C} \dots (8)$$

där

$\mathbf{A}$ = koefficientmatris med element som beror av balkegenskaper

$\mathbf{M}$ = kolumnvektor med de s kta st dmomenten

$\mathbf{C}$ = kolumnvektor med element som beror av laster på balken

Den generella lÅsningen till ekv (8) lyder

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \quad \dots (9)$$

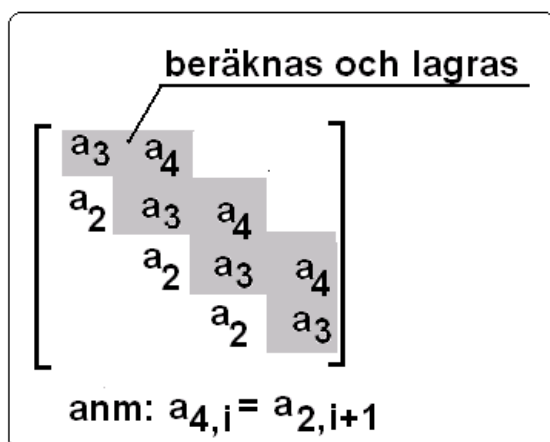
dÅr $\mathbf{A}^{-1}$ År inversmatris till $\mathbf{A}$

Som framgÅr av figur 5 har matrisen $\mathbf{A}$ bandstruktur med en huvuddiagonal och tvÅ co-diagonaler (en Åverdiagonal och en underdiagonal). Diagonalerna innehÅller elementen a_3 , a_4 och a_2 , respektive, se figur 5. Man kan visa att element a_4 pÅ en rad År lika med element a_2 pÅ raden under. Matrisen $\mathbf{A}$ År alltsÅ en symmetrisk tridiagonal bandmatris (bandbredd = 3) med ordningen $(n-2)*(n-2)$.

Detta innebÅr att endast elementen i huvuddiagonalen a_3 och elementen a_4 i Åverdiagonalen behÅver berÅknas och lagras, se figur 6. Erforderligt utrymme fÅr lagring av $\mathbf{A}$ År

$2*m - 2$, approximativt lika med $2*m$

dÅr $m = n - 2$, dÅr n = antal stÅd fÅr den kontinuerliga balken



Figur 6. A-matrisen År en symmetrisk bandmatris.

Som nÅmnts kan stÅdmomenten berÅknas genom att berÅkna inversmatrisen $\mathbf{A}^{-1}$.

Ett villkor fÅr att inversmatrisen ska existera År att matrisen $\mathbf{A}$ inte År singular.

Singularitet uppkommer exempelvis om nÅgot element i huvuddiagonalen År lika med noll.

Till skillnad från bandmatrisen **A**  r inversmatrisen **A⁻¹** fylld av element skilda från noll. För att lagra inversmatrisen  tg r d rf r m^2 element j mf rt med $2 \cdot m$ element för lagring av de två diagonalerna enligt figur 6.

För en balk med måttligt antal st d spelar skillnaden ingen roll, men om antalet st d är mycket stort blir tillgänglig minneskapacitet en begränsande faktor. För exempelvis 10000 st d kräver inversl sningen lagring av 100 miljoner flyttal, medan lagring av enbart de två huvuddiagonalerna endast kräver lagring av 0,02 miljoner flyttal. Man frågar sig kanske n r/om det kan bli aktuellt att ber kna en balk med så många stöd - som framgår senare medför modellering av balkar på elastiskt underlag ofta ett mycket stort antal st d.

L sning av ekvationssystemet **AM = C**

Det snabbaste sättet att l sa ekvationssystemet är direkt Gausseliminering med  terf ljande bakåtsubstitution. Vid Gausselimineringen transformeras matrisen A så att alla element under huvuddiagonalen blir = 0.

Vid direkt Gausseliminering sker division med elementen i huvuddiagonalen i nämnaren. I de fall dessa v rden blir alltf r små j mf rt med  vriga element så kan förlust i noggrannhet uppkomma. Om något diagonalelement  r = 0 kan ingen l sning alls uppnås med direkt Gausseliminering. För att åtgärda sådana problem kan pivotering till mpa, vilket inneb r att ordningsföljden f r rader ändras så att numerisk instabilitet, orsakad av division med mycket små tal, om m jligt undviks. Pivotering  kar f rst s antalet operationer. Man kan anv nda partiell pivotering (enbart radbyten) eller fullständig pivotering (byte av både rader och kolumner).

I det fall matrisen a  r diagonaldominant, vilket inneb r att diagonalelementen på varje rad  r st rre än summan av omgivande element på samma rad, så kan den önskvärda metoden direkt Gausseliminering med  terf ljande bakåtsubstitution anv ndas utan noggrannhetsförlust. I det aktuella fallet inneb r diagonaldominans att för varje rad ska gälla

$$|a_3| > |a_2| + |a_4| \quad \dots (10)$$

För en balk med konstant EI erhålls enligt ekv (5) att

$$a_2 = L_2 \quad \dots (11a)$$

$$a_4 = L_3 \quad \dots (11b)$$

$$a_3 = 2(L_2 + L_3) = 2(a_2 + a_4) \quad \dots (11c)$$

Vilket uppenbarligen medför diagonaltunghet. Även det mer generella fallet med varierande L , E och I för varje fack ger diagonaltunghet, vilket framgår av ekv 12 a – c nedan. Notera dock att EI inte f r vara = 0 för någon delbalk.

$$a_2 = L_2 / (E_2 I_2) \quad \dots(12a)$$

$$a_4 = L_3 / (E_3 I_3) \quad \dots(12b)$$

$$a_3 = 2(a_2 + a_4) \quad \dots(12c)$$

Antalet ber kningsoperationer som krävs för att ber kna inversmatrisen $\mathbf{A}^{-1}$ är proportionell mot m^3 och antalet operationer som krävs för matrismultiplikationen

$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}$ är proportionell mot m^2 . Detta kan jämföras med det totala antalet operationer för att utföra direkt Gausselimination och bakåtsubstitution som är proportionellt mot m .

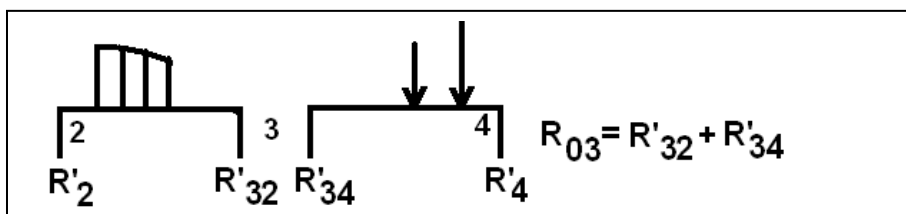
Sammanfattningsvis g ller alltså att kontinuerliga balkar på fasta (oeftergivliga) st d snabbast och med minsta behov av minnesutrymme analyseras med direkt Gausselimination och bakåtsubstitution på det sätt som visats ovan.

Ber kning av stödreaktioner

Sedan st dmomenten har ber knats så ber knar man stödreaktionerna. F r st det 3 enligt ovan blir reaktionen R_3 lika med

$$R_3 = R_{03} + (M_2 - M_3)/L_2 + (M_4 - M_3)/L_3 \quad \dots(13)$$

där R_{03} = stödreaktionen motsvarande delbalkar utan  ndmoment, se figur 7.



Figur 7. Upplagsreaktioner f r delbalkar

Elastiska st d

Ekv (3), Clapeyrons ekvation, kallas ofta "tremomentekvationen" eftersom 3 obekanta st dmoment ingår i ekvationen. Några år (1860) efter det att Clapeyrons ekvation publicerats så kompletterade Mohr ekvationen med en term som beaktar

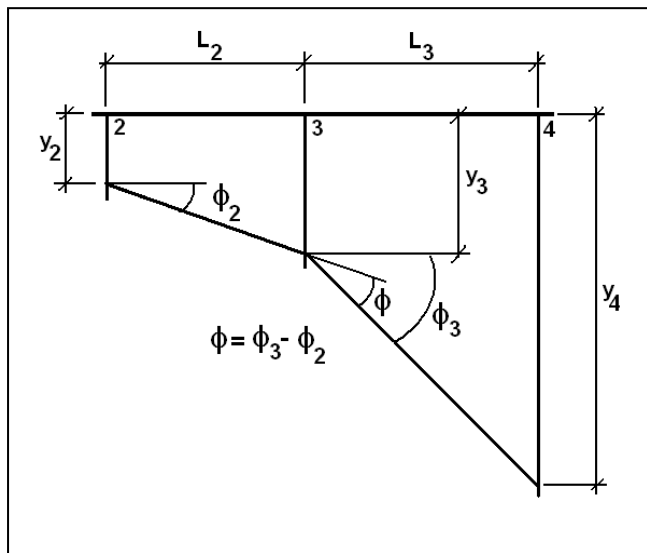
nedsjunkning av ett stÅd. Det resulterande uttrycket fÅr ett visst stÅdmoment innefattar stÅdmomenten i 5 nÅrbelÅgna stÅd och Mohrs komplettering av tremomentekvationen brukar dÅrfÅr kallas "femmomentekvationen".

Korrektionen innebÅr att till summan av stÅdvinkelÅndringarna ($\alpha + \beta$) orsakade av last pÅ balken, adderas en vinkelÅndring ϕ som beror av stÅdnedsjunkning, se figur 8. Den modifierade ekv (2 blir dÅ:

$$M_2 \Theta_{23} + M_3 (\Theta_{32} + \Theta_{34}) + M_4 \Theta_{43} + \alpha + \beta + \phi = 0 \quad \dots (14)$$

Den modifierade tremomentekvationen ekv (3) lyder:

$$M_2 * L_2 / (EI_2) + 2M_3 * (L_2 / (EI_2) + L_3 / (EI_3)) + M_4 * L_3 / (EI_3) + 6 * (\alpha + \beta + \phi) = 0 \quad \dots (15)$$



Figur 8. StÅdvinkelÅndring ϕ vid stÅd 3 av stÅdnedsjunkningar

StÅdvinklarna, uttryckta i radianer, antas motsvara funktionen tangens fÅr vinklarna, vilket motiveras av att vinklarna År mycket smÅ. Den sÅkta vinkelÅndringen ϕ vid stÅd 3 berÅknas dÅrfÅr som fÅljer (beteckningar enligt figur 8) :

$$\phi = (y_4 - y_3) / L_3 - (y_3 - y_2) / L_2 \quad \dots (16)$$

dÅr y_i betecknar nedsÅnkningar fÅr respektive stÅd "i".

Sambandet mellan nedsjunkning och stÅdreaktion fÅr stÅden antas linjÅrt. FÅr varje stÅd finns dÅrfÅr en fjÅderkonstant (k), exempelvis fÅr stÅd 3:

$$R_3 = k_3 * y_3 \quad \dots (17)$$

som ger

$$y_3 = R_3 / k_3 \quad \dots (18)$$

FjÅderkonstanten har dimensionen kraft/lÅngd. VÅrdet pÅ k bestÅms av stÅdens utformning, exempelvis upplag pÅ sekundÅrbalkar som ger viss nedbÅjning vid belastning, pÅ pÅlar som ger viss hoptryckning dÅ de belastas, eller underlag som vilar pÅ mark som vid last ger viss nedsjunkning.

Sambandet mellan stÅdreaktion och bÅjmoment ges av ekv (13). Kombination av ekv (13) och ekv (18) ger ett samband mellan nedsÅnkning och bÅjmoment:

$$y_3 = [R_{03} + (M_2 - M_3)/L_2 + (M_4 - M_3)/L_3] / k_3 \quad \dots (19)$$

Den sÅkta vinkelÅndringen ϕ kan sÅledes uttryckas som funktion av stÅdmomentet M_3 vid det studerade stÅdet 3, stÅdmomenten vid de tvÅ stÅden till vÅnster om detta (M_1 och M_2) samt stÅdmomenten de tvÅ stÅden till hÅger om stÅd 3 (M_4 och M_5). De stÅdnedsjunkningar y_2 , y_3 och y_4 som behÅvs fÅr att berÅkna ϕ enligt ekv (16) tecknas nÅmligen

$$y_2 = [R_{02} + (M_1 - M_2)/L_1 + (M_3 - M_2)/L_2] / k_2 \quad \dots (20)$$

$$y_3 = \text{ekv}(19)$$

$$y_4 = [R_{04} + (M_3 - M_4)/L_3 + (M_4 - M_2)/L_3] / k_4 \quad \dots (21)$$

Med syftet att uppnÅ en matrisformulering tecknas motsvarigheten till ekv (4) fÅr balk pÅ fasta stÅd enligt fÅljande:

$$g_1 M_1 + g_2 M_2 + g_3 M_3 + g_4 M_4 + g_5 M_5 = q_3 \quad \dots (22)$$

dÅr g_1 , g_2 , g_3 , g_4 och g_5 År koefficienter som beror av balkens egenskaper och termen q_3 Åven beror av lastdata.

BerÅkningen av koefficienterna g_1 omfattar insÅttning av ekv (19), (20) och (21) i ekv (16) och dÅrefter fÅrenklingar och fÅrkortningar. Slutresultatet fÅr en balk med konstant E-modul, blir fÅr stÅd 3 som fÅljer:

$$g_1 = 6EA_1 \quad \dots (23a)$$

$$g_2 = L_2/I_2 - 6E(A_1 + A_2 + A_3) \quad \dots (23b)$$

$$g_3 = 2(L_2/I_2 + L_3/I_3) + 6E(A_2 + 2A_3 + A_4) \quad \dots (23c)$$

$$g_4 = L_3/I_3 - 6E(A_3 + A_4 + A_5) \quad \dots (23d)$$

$$g_5 = 6EA_5 \quad \dots (23e)$$

$$q_3 = -6E[\alpha + \beta + R_{02}/(k_2 L_2) - (R_{03}/k_2)(1/L_2 + 1/L_3) + R_{04}/(k_4 L_3)] \quad \dots(24)$$

dÅr

$$A_1 = 1/(k_2 L_1 L_2) \quad \dots(25a)$$

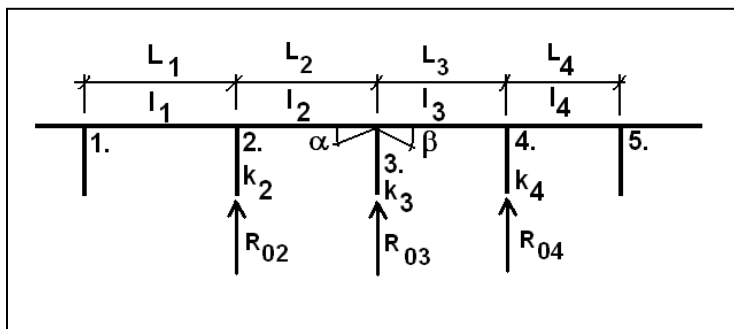
$$A_2 = (1/(L_2 L_2)) * (1/k_2 + 1/k_3) \quad \dots(25b)$$

$$A_3 = 1/(k_3 L_2 L_3) \quad \dots(25c)$$

$$A_4 = (1/(L_3 L_3)) * (1/k_3 + 1/k_4) \quad \dots(25d)$$

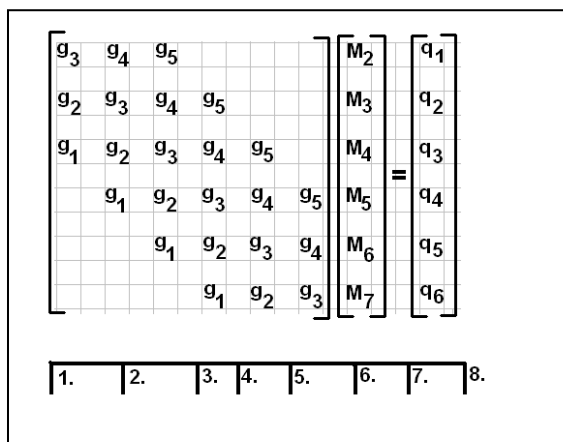
$$A_5 = 1/(k_2 L_1 L_2) \quad \dots(25e)$$

Beteckningar framgÅr av figur 9a.



Figur 9a. Beteckningar ekv (23 a –e), (24) och (25 a –e).

Den kontinuerliga balk pÅ elastiska stÅd som ska analyseras antas ha ledade ÅndstÅd, utan stÅdmoment. FÅr en balk pÅ n stÅd uppstÅlls dÅrfÅr $m = n - 2$ ekvationer fÅr att berÅkna m stÅdmoment. FÅr en balk pÅ 8 stÅd erhÅlls exempelvis matriser och kolumnvektorer enligt figur 9b.



Figur 9b. Balk pÅ 8 stÅd, matrisbeskrivning

I matrisform kan uttrycket i figur 9b skrivas

$$\mathbf{GM} = \mathbf{Q} \quad \dots(26)$$

som har den generella lösningen

$$\mathbf{M} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{Q} \quad \dots(27)$$

Sedan stödmomenten M_i beräknats så beräknar man reaktioner R_i och nedsjunkningar y_i ,

$$R_i = R_{0i} + (M_{i-1} - M_i)/L_{i-1} + (M_{i+1} - M_i)/L_i \quad \dots(28)$$

$$y_i = R_i / y_i \quad \dots(29)$$

där $i = 1, 2, \dots, n = \text{antal stöd}$.

Beräkningen är då klar. För att undersöka inverkan av avrundningsfel bör skillnaden mellan beräknade reaktioner och anbringade laster beräknas, d v s

$$\text{skillnad} = \text{summa}(R_i) - \text{summa}(R_{0i}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots(30)$$

I många program för beräkningar där oundvikliga numeriska avrundningsfel förekommer, ofta tillsammans med andra felkällor relaterade till beräkningsmetodik, saknas tyvärr en sådan kontroll vilket förstås är en brist.

Lösning av ekvationssystemet, ekv (26)

Som framgår av figur 9b är matrisen $\mathbf{G}$ en bandmatris med bandbredden 5 och ordningen $m \times m$. I likhet med motsvarande matris för en balk på fasta stöd är $\mathbf{G}$ symmetrisk, vilket innebär att endast elementen i huvuddiagonalen samt de två överliggande co-diagonalerna behöver beräknas och lagras.

Samma problematik som gäller balk på fasta stöd vad gäller beräkning av stödmomentvektorn $\mathbf{M}$ med inversmatris gäller även för balk på elastiska stöd. Direkt Gausseliminering med åtföljande bakåtsubstitution är även här den snabbaste och minst utrymmeskrävande metoden. Villkoren för att $\mathbf{G}$ skall vara diagonaldominant (eller positivt definit) är dock mer komplicerade. För det generella fallet med varierade k , L och I finner man att diagonaldominans kräver att varje rad uppfyller villkoret

$$L_2/I_2 + L_3/I_3 \geq 4E[1/(k_2L_1L_2) + 1/(k_4L_3L_4)] \quad \dots(31)$$

För balk med konstanta värden för fjäderkonstanter k , spännvidder L och böjstyvheter EI ger ekv (31) att diagonaldominans erhålls om

$$kL^3/(EI) \geq 4 \quad \dots(32)$$

Den numeriska stabiliteten gynnas alltså av

- stora värden på fjäderkonstanterna k ,
- stora spännvidder L och
- små värden på böjstyvheter EI .

Omvänt kan

- små fjäderkonstanter,
- små spännvidder och
- stor böjstyvheter

ge signifikant noggrannhetsförlust vid direkt Gausselimination. Enklast kontrolleras uppkomst av noggrannhetsförlust genom beräkning av differensen ekv (30). Som nämnts tidigare får inte värdet noll förekomma i huvuddiagonalen (g_3) vid direkt Gausseliminering.

Det ska nämnas att noggrannhetsförlust inte uppkommer plötsligt vid direkt Gausseliminering då koefficientmatrisen G inte helt uppfyller kraven för diagonaldominans. I praktiken kan ofta relativt brutala val av balkdata ske utan att alltför stora fel i beräkningsresultatet uppkommer. Extrema värden kan vara motiverade av behov av att simulera leder, konsoler, inspända ändstöd, och andra diskontinuiteter hos balken. Givetvis ska i sådana fall kontroll av beräkningsresultatet genom beräkning av ekv (30) ske.

En generellt sett mer stabil algoritm för lösningen av ekvationssystemet ekv(26) kan uppnås genom att pivotering utförs, så att noggrannheten optimeras. En sådan metod medför dock ökad beräkningstid, vilket i många fall kanske inte har så stor betydelse, men också, som det visat sig, inte alltid ger åsyftat resultat.

Genom möjligheten av ett brett spektrum av val av värden som genererar matriselementen är det inte möjligt att entydigt bestämma någon metod som för alla variationer garanterar en hög noggrannhet. Användning av Direkt Gausseliminering och bakåtsubstitution tillämpas därför tillsammans med kontroll av räknefele enligt ekv (30). Uppkommer större fel är det i allmänhet möjligt att ändra några indata så att godtagbart resultat erhålls.

I de fall flera lastfall (fler hÅgerled **Q**) ska berÅknas (exempelvis vid berÅkning av influenslinjer), sÅ sparar man den efter Gausselimineringen triangulerade matrisen **G**, se nedan.

LU-faktorisering

Om **G** År positivt definit, vilket i allmÅnhet År fallet fÅr aktuella balkar, sÅ kan **G** faktoriseras med Choleskis metod, vilket ger snabb berÅkning:

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} \quad \dots (33)$$

($\mathbf{U}^T$ År transponatet av **U**)

varefter man lÅser

$$\mathbf{U}^T \mathbf{x} = \mathbf{Q} \quad \dots (34)$$

som ger en vektor **x**

$$\text{och sedan } \mathbf{U}\mathbf{M} = \mathbf{x} \quad \dots (35)$$

som ger den de sÅkta stÅdmomenten **M**. FÅr det aktuella problemet bedÅms dock den nedan beskrivna algoritmen mer effektiv i och med att den sÅrskilt tar hÅnsyn till egenskaperna hos **G**.

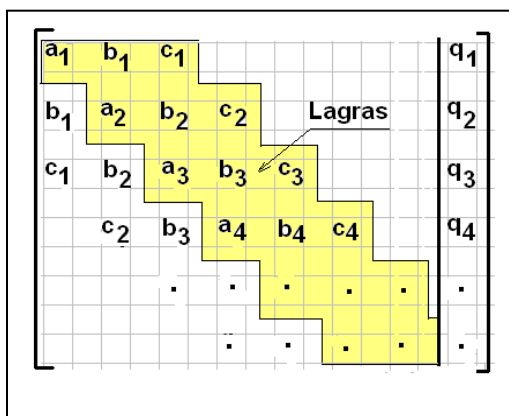
Direkt Gausseliminering med bakÅtsubstitution

Huvuddiagonalen och de tvÅ Åverliggande co-diagonalerna lagras som vektorer **a**, **b** och **c**.

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m) \quad \dots (36a)$$

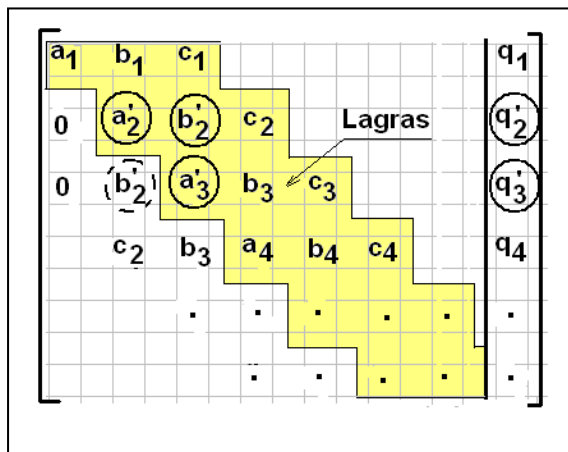
$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_{m-1}) \quad \dots (36b)$$

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_{m-2}) \quad \dots (36c)$$



Figur 10. Matris **G** lagrad som vektorer **a**, **b** och **c**

Vid varje eliminationssteg så transformeras 3 element i **G**-matrisen, tillsammans med två element i **Q**. I figur 11 illustreras det 1:a steget.



Figur 11. G-matrisen och högerledet Q efter 1:a eliminationssteget

Algoritmen för eliminationen lyder f r $i = 1, 2, \dots, m$

$$p_i = q_i / a_i \quad \dots(37a)$$

$$a_{i+1} = a_{i+1} - p_i b_i \quad \dots(37b)$$

$$b_{i+1} = b_{i+1} - p_i c_i \quad \dots(37c)$$

$$a_{i+2} = a_{i+2} - c_i c_i / a_i \quad \dots(37d)$$

$$q_{i+1} = q_{i+1} - p_i q_i \quad \dots(37e)$$

$$q_{i+2} = q_{i+2} - c_i q_i / a_i \quad \dots(37e)$$

Slutresultatet  r en triangul r matris **G** (enbart element = 0 under huvuddiagonalen) så att bak substitution kan starta, se figur 12.

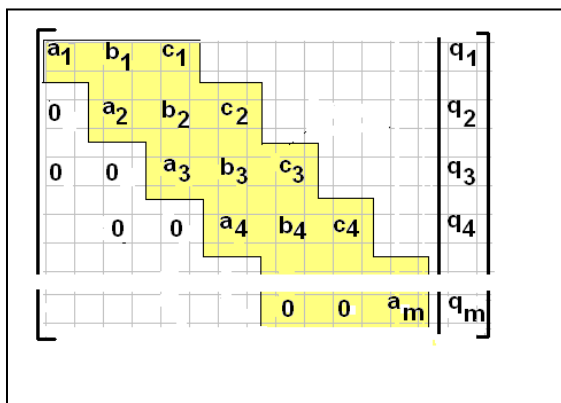


Fig 12. Slutresultatet av Gausseliminationen, **G** triangulerad. Notera att elementen inte är desamma som visas i figur 10, fastän beteckningarna är desamma.

BakÅtsubstitution

BakÅtsubstitutionen bÅrjar frÅn botten av den triangulerade **G**-matrisen:

$$M_m = q_m/a_m \quad \dots(38)$$

Åvriga stÅdmoment M_j berÅknas uppÅt i figur 12 enligt uttrycket

$$M_j = (q_j - M_{j+1} \cdot b_i - M_{j+2} \cdot c_{i-1})/a_i \quad ; j = m-1, m-2, \dots, 2 \quad \dots (39)$$

ÅndstÅdmomenten, M_1 och M_n antas vara = 0

Notera att index fÅr vektorelementen i figurerna År nÅgot missvisande sÅtillvida att den fÅrsta raden i **G**-matrisen avser stÅd 2.

Balkar pÅ elastiskt underlag

DÅ avstÅndet (L) mellan stÅden minskas nÅrmar sig fÅrhÅllandena de som gÅller fÅr en balk pÅ elastiskt underlag av Winkler-typ. En sÅdan balk kÅnnetecknas av att kontaktrycket (p) mellan balken och underlaget i varje balktvÅrsnitt År proportionellt mot nedsÅnkningen (y) i snittet, d v s

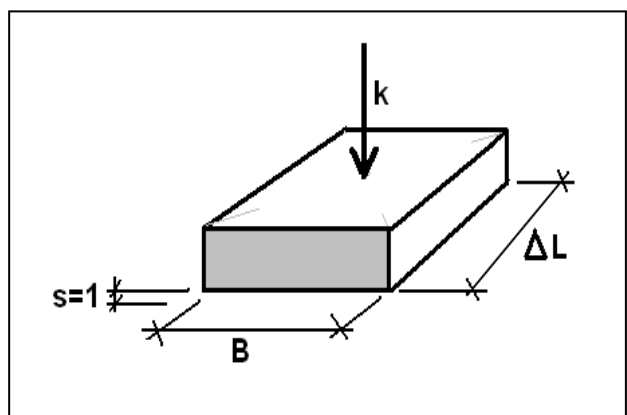
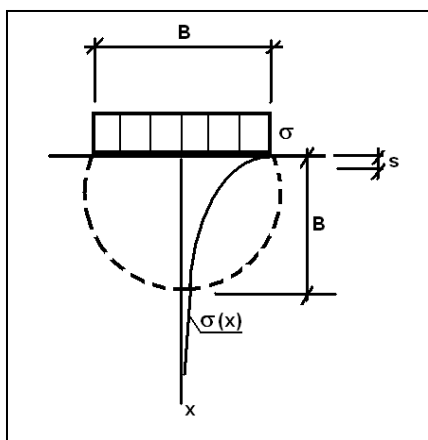
$$p = cy \quad , \text{ [kraft/lÅngdenhet } t^2] \quad \dots(40)$$

$$\text{dÅr } c = \text{markens bÅddmodul} \quad , \text{ [kraft/lÅngdenhet } ^3] \quad \dots(41)$$

FÅr en sÅdan balk ger elastiska linjens ekvation vid konstanta vÅrden fÅr L , EI och c :

$$EI(d^4 y/dx^4) + cy = q(x) \quad ; q(x) = \text{belastning pÅ balken} \quad \dots (42)$$

Vid analys med 5-momentekvationen "ÅversÅtts" det elastiska underlaget till fjÅderstyvheter pÅ det sÅtt som visas i figur 13.



Figur 13. BerÅkning av ekvivalent stÅdstyvhet k vid balk pÅ elastiskt underlag

SÅsom illustreras i figur 13 minskar den vertikala tillÅggsspÅningen $\sigma(x)$ av en belastning pÅ markytan σ med Åkande djup x . FÅrenklat kan detta visas med 2:1-metoden. Man brukar dÅrfÅr fÅrsumma spÅnningsÅkningen pÅ ett djup stÅrre Ån lastens bredd B , som antyds i figuren. Om nedsÅnkningen betecknas s sÅ blir dÅ den relativa nedsÅnkningen ε :

$$\varepsilon = s/B \quad \dots(43)$$

Vi sÅker ε fÅr nedsÅnkningen $s = 1$ lÅngdenhet, vilket ger :

$$\varepsilon = 1/B \quad \dots(44)$$

Ett utskuret balksegment av en balk pÅ elastiskt underlag har arean $(B \times \Delta L)$, se figur 13. Den sÅkta fjÅderkonstanten k , som ska anvÅndas vid berÅkning med fem-momentekvationen, År dÅ den kraft som ger segmentet nedsjunkningen $s = 1$.

Kontakttrycket σ mellan balken och underlaget fÅr segmentet År

$$\sigma = k/(B \times \Delta L) \quad \dots(45)$$

Enligt Hook's lag gÅller

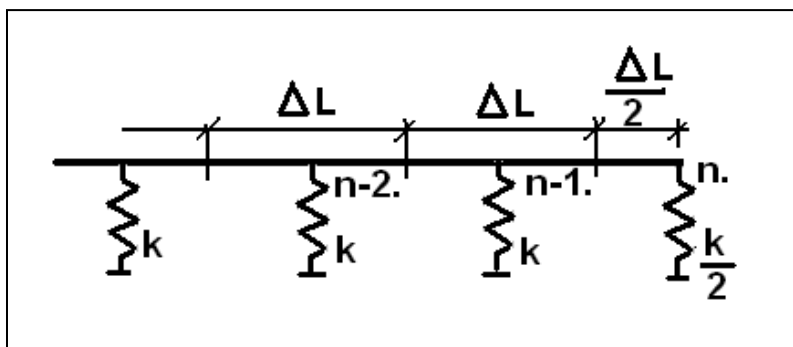
$$\varepsilon = \sigma / E_{\text{jord}} \quad \dots(46)$$

Kombineras ekv(44), (45) och (46) fÅr man efter fÅrenkling

$$k = \Delta L \cdot E_{\text{jord}} \quad \dots(47)$$

VÅrden pÅ jordens E-modul (E_{jord}) redovisas i handbÅcker och brukar anges i tekniska beskrivningar i fÅrfrÅgningsunderlag fÅr byggobjekt.

FÅr ÅndstÅd ska k enligt Winkler-modellen teoretiskt vÅljas till hÅlften av vÅrdet enligt ekv (47) nÅr balken delas in i lika delar, se figur 14.

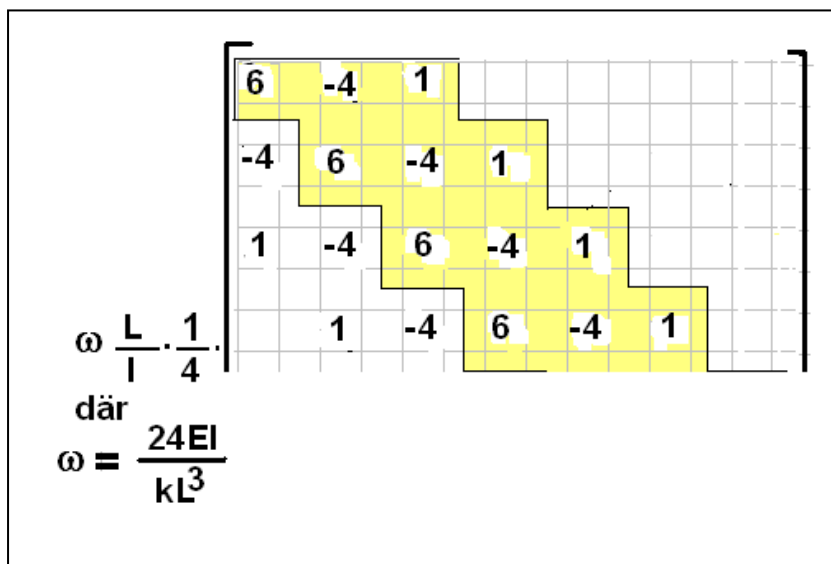


Figur 14. FjÅderkonstant fÅr ÅndstÅd enligt Winkler-modell

Winklermodellen tolkad på detta sätt har emellertid bristen att förutsätta att det elastiska underlaget slutar vid balkänden. En mer korrekt teoretisk modell (t ex Boussineq), som beaktar att underlaget sträcker sig förbi balkänden, ger ett högre värde för den modellerade balkens fjäderkonstanter vid ändstöden. Därför är det motiverat att använda samma fjäderkonstant k för ändstöden som för resten av balken.

En berättigad fråga är nu hur den numeriska noggrannheten påverkas av val av segmentlängder.

För mycket små värden för fjäderkonstanterna och konstanta värden EI , k och L för varje balkfack närmar sig matrisen $\mathbf{G}$ koefficienterna enligt figur 15.



Figur 15. Matrisen $\mathbf{G}$ vid mycket eftergivliga stöd (små k -värden)

Man kan visa att $\mathbf{G}$ är positivt definit, vilket medger LU-faktorisering och säkerställer god numerisk noggrannhet vid lösning, när

$$\omega \geq 0 \quad \dots(48)$$

där

$$\omega = 24EI/kL^3 \quad \dots(49)$$

Om man sätter $L = \Delta L$ och gör substitutionen $k = \Delta L E_{jord}$ så ger ekv (48) och (49) efter förenkling

$$\Delta L \leq [24EI/E_{jord}]^{1/4} \quad \dots (50)$$

Man kan notera att koefficienterna i **G**-matrisen, fig 15,   r desamma som erh  lls vid differensapproximation med centraldifferens av d^4y/dx^4 i differentialekvationen f  r balk p   elastiskt underlag, ekv (42):

$$(d^4y/dx^4) \text{   r approx } = [+1y_{i+2,i} - 4y_{i+1,i} + 6y_{i,i} - 4y_{i-1,i} + 1y_{i-2,i}] / \Delta x^4 \quad \dots (51)$$

D   segmentl  ngderna n  rmar sig noll n  rmar sig allts   den visade l  sningen f  r femmomentekvationen balken p   kontinuerligt elastiskt underlag, som sig b  r.

N  r man "fysiskt" flyttar st  den n  rmare varandra s   inneb  r det matematiskt en gr  ns  verg  ng i stil med att l  ta "dx" g   mot noll vid integrering. En numerisk modell ska generellt ha egenskapen att vid minskande stegl  ngd n  rma sig den exakta matematiska l  sningen.

Referenser

1. Forsell, C., Safety considering buckling for piles and pile groups, Royal Corps of Civil Engineers, Stockholm 1926, p 145,(in Swedish).
2. Bjerrum, L., "Norwegian experiences with steel piles to rock", Geotechnique, Vol 7, 1957, pp 73 - 96.
3. Broms, B., "Allowable bearing capacity of initially bent piles", Information from the Swedish Pile Commission, 1965-10-25.
4. Report 23, Bernander, S. and Svensk, I., "Bearing Capacity for piles in an elastic media considering built in stresses", Swedish Pile Commission", report 23, 1970 (in Swedish), pp 1-28
5. Report 81, " Systempiles - point bearing piles of high strength steel tube piles driven with light weight high speed hammers", Swedish Pile Commission", Stockholm 1989, pp 1 - 47
6. Report 84a, "Calculation of design bearing capacity of driven piles considering the strength of the pile material and the strength of the surrounding soil", Swedish Pile Commission", , Linköping 1995, pp 1 - 47 (In Swedish with English summary and text in figures).
7. Report 98, "Common Design Principles for Piles - Load Capacity", Swedish Pile Commission",,, Linköping 1998, pp 1 - 68 (In Swedish with English summary and text in figures).
8. Report 96:1 "Guidelines for the design of driven, slender steel piles", Swedish Pile Commission", report 98, Linköping 2000, pp 1 - 73 (In Swedish with English summary and text in figures).
9. Bredenberg H., Influence of initial deflection on Bearing Capacity for Micro Piles, International Society for Micro Piles, proceedings, Conference Schrobenehausen, Germany 2006.
10. Aron Caselunghe, Jonas Eriksson, "Structural Element Approaches for Soil-Structure Interaction", Institutionen för bygg- och miljöteknik, CTH, nr 2012:62, 2012.
11. Timoshenko ,S P, Gere , "Theory of Elastic Stability", McGraw Hill, New York, 1961
12. Hetényi, M, "Beams on Elastic Foundation", AnnArbor, University of Michigan, 1946
13. Wang, C M, Wang C Y, Reddy, J N, " Exact Solutions for Buckling of Structural Members", CRC Press, Florida, 2005.
14. Bathe, K J, Wilson, E, " Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
15. Chatelin, F, "Eigenvalues of Matrices", John Wiley & Sons, Chichester, 1993.